

ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ ФІЗИКИ НАН УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Хелемеля Олексій Володимирович

УДК 530.145:537.533.9:537.632

ДИСЕРТАЦІЯ

Втрати енергії важкої зарядженої частинки
в замагніченому електронному газі з анізотропною температурою

01.04.02 - теоретична фізика

Фізико-математичні науки

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук
Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, резуль-
татів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

_____ О. В. Хелемеля

Науковий керівник — Холодов Роман Іванович, канд. фіз.-мат. наук, старший
науковий співробітник, доцент

Суми – 2018

АНОТАЦІЯ

Хелемеля О. В. Втрати енергії важкої зарядженої частинки в замагніченому електронному газі з анізотропною температурою. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.04.02 - теоретична фізика. — Інститут прикладної фізики НАН України, Суми, 2018.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню взаємодії важкої зарядженої частинки з електронним газом з анізотропним розподілом за швидкостями в зовнішньому магнітному полі. Для досягнення цієї мети в дисертації вирішуються наступні завдання: визначається явний вигляд поляризаційного оператора з урахуванням анізотропного розподілу електронів за швидкостями та впливу зовнішнього однорідного магнітного поля; використовуючи явний вигляд поляризаційного оператора, знаходиться залежність енергетичних втрат важкої зарядженої частинки від її швидкості; досліджується вплив ізотропної та анізотропної температур електронного газу на енергетичні втрати іона; вивчається вплив магнітного поля на гальмівну здатність електронного газу з анізотропним розподілом за швидкостями.

В роботі вперше запропоновано для дослідження процесу електронного охолодження використовувати квантово-польовий підхід. Застосування квантово-польових методів для знаходження енергетичних втрат зарядженої частинки в замагніченому електронному газі з анізотропним розподілом за швидкостями дало змогу, виходячи з перших принципів, визначити залежність гальмівної здатності замагніченого електронного газу з анізотропним розподілом за швидкостями від швидкості важкої зарядженої частинки без використання емпіричних параметрів, процедур обрізання і зшивки.

Вперше знайдено аналітичні вирази для дійсної та уявної частин діелектричної сприйнятливості замагніченого електронного газу з анізотропним розподілом за швидкостями в рамках квантово-польового підходу.

Використовуючи явний вигляд діелектричної проникності, чисельно отримано значення енергетичних втрат важкої зарядженої частинки для всіх значень її швидкості з врахуванням впливу температури та зовнішнього однорідного магнітного поля.

У випадку відсутності зовнішнього магнітного поля:

а) при ізотропному розподілі електронів за швидкостями максимум гальмівної здатності зростає пропорційно до зменшення температури електронного газу. Положення максимуму відповідає значенням швидкості зарядженої частинки, яка в $2^{1/2}$ раз більша за середню теплову швидкість електронів;

б) при анізотропному розподілі електронів за швидкостями, коли повздовжня температура електронного газу менша на 3 порядки від поперечної, максимум гальмівної здатності в 3 рази перевищує значення при ізотропному розподілі. Положення максимуму гальмівної здатності визначається значенням середньої повздовжньої теплової швидкості електронів, і при її зменшенні зміщується в область менших швидкостей.

4. У випадку сильного зовнішнього магнітного поля, коли повністю подавлений поперечний рух електронів, показано, що:

а) при ізотропному розподілі електронів за швидкостями максимум гальмівної здатності менший в 2.4 рази в порівнянні з випадком без магнітного поля;

б) при анізотропному розподілі електронів за швидкостями, коли повздовжня температура електронного газу менша на 3 порядки від поперечної, максимум гальмівної здатності в 300 разів перевищує значення при ізотропному розподілі. Положення максимуму відповідає значенням швидкості зарядженої частинки, яка в $2^{1/4}$ раз більша за середню теплову повздовжню швидкість електронів.

У випадку повної замагніченості електронного газу охолодження (передача енергії) важкої зарядженої частинки електронами з анізотропним розподілом за швидкостями відбуватиметься швидше (значення максимуму гальмівної

здатності більше) та глибше (положення максимуму гальмівної здатності визначається середньою повздовжньою тепловою швидкістю електронів, яка на кілька порядків менша за поперечну — допустима температура охолодження менша).

Ключові слова: електронний газ, енергетичні втрати, гальмівна здатність, ізотропна та анізотропна температура, магнітне поле, квантово-польовий метод, діелектрична сприйнятливність.

Список публікацій здобувача за темою дисертації. 1. Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати:

1. Khelemelya O.V. Dielectric model of energy losses by a massive charged particle moving through cold magnetized plasma / **O.V. Khelemelya**, R.I. Kholodov, V.I. Miroschnichenko // Ukr. J. Phys. – 2013. – Vol. 58. – No. 8. – P. 725-734.

2. Khelemelya O.V. Quantum field methods in the electron cooling/ **O.V. Khelemelya**, R.I. Kholodov // Problems of atomic science and technology. – 2013. – No. 3(85). – P. 53-57.

3. Khelemelia O.V. The influence of the anisotropic temperature of the electron gas on energy losses of a charged particle in a plasma / **O.V. Khelemelia**, R.I. Kholodov // Problems of atomic science and technology. – 2015. – № 1(95). – P. 69-72.

4. Khelemelia O.V. Stopping power of an electron gas with anisotropic temperature / **O.V. Khelemelia**, R.I. Kholodov // Modern Physics Letters A. – 2016. - Volume: 31. - Number: 13

5. Khelemelia O.V. The influence of the external magnetic field on energy losses of a charged particle in an electron gas / **O.V. Khelemelia**, R.I. Kholodov // Problems of atomic science and technology. – 2017. – №1. – с.68-71.

2. Наукові праці апробаційного характеру:

6. Khelemelya O.V. Electron cooling force calculation in plasma dielectric frame / **O.V. Khelemelya** // Trans-European School of High Energy Physics

– TESHER'2011, 7-14 July 2011: proceedings. – Alushta, Crimea, Ukraine, 2011. – P. 177-178.

7. Хелемеля О.В. Втрати важкої зарядженої частинки в замагніченій електронній плазмі / **О.В. Хелемеля** // Матеріали I міжрегіональної науково-практичної конференції молодих учених. Сучасні проблеми експериментальної та теоретичної фізики. – СПЕТФ'2012. – Суми, Україна, 2012. – С. 75-76.

8. Khelemelia O.V. Calculation of the Electron Thermal Plasma Permittivity / **O.V. Khelemelia** // 12-th International Conference on Laser and Fiber-Optical Network Modeling (LFNM), 2-4 October 2013: proceedings. – Sudak, Crimea, Ukraine, 2013. – С. 55-57

9. Хелемеля О.В. Енергетичні втрати зарядженої частинки в електронному газі з врахуванням температури / **О.В. Хелемеля**, Р.І. Холодов // XXI щорічна наукова конференція інституту ядерних досліджень НАН України. – Київ. Україна, 2014. – С. 157.

10. Khelemelia O.V. The Influence of the Anisotropic Temperature of the Electron Gas on Energy Losses of Charged Particle in a Plasma / **O.V. Khelemelia**, R.I. Kholodov // International Conference-School on Plasma Physics and Controlled Fusion. ICPPCF'2014. – Kharkiv. Ukraine. September 15-18, 2014. – P. 62.

11. Хелемеля О.В. Втрати важкої зарядженої частинки в плазмі з врахуванням температури електронного газу / **О.В. Хелемеля**, Р.І. Холодов // Школа-семінар. Багатомасштабне моделювання фізичних процесів у конденсованих середовищах. Multiscale Modeling of Physical Processes in Condensed Matter, 21-22 жовтня 2014: тези доповідей – Суми. Україна, 2014. – С. 28

12. Хелемеля О.В. Вплив анізотропії температури електронів на гальмівну здатність у плазмі / **О.В. Хелемеля**, Р.І. Холодов // Тези доповідей XXII щорічної наукової конференції інституту ядерних досліджень НАН України, 26-30 січня 2015: тези доповідей. – Київ. Україна, 2015. – С. 156-158

13. Хелемеля О.В. Визначення енергетичних втрат важкої зарядженої частинки в замагніченому електронному газі в рамках квантово-польового

методу / **О.В. Хелемеля**, Р.І. Холодов // Тезисы докладов XIV конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям, 22-25 марта 2016: тезисы докладов. – Харьков. Украина, 2016. – С. 112.

14. Хелемеля О.В. Діелектрична сприйнятливість електронного газу у зовнішньому магнітному полі / **О.В. Хелемеля** // Матеріали II міжрегіональної науково-практичної конференції молодих учених. Сучасні проблеми експериментальної та теоретичної фізики. – СПЕТФ'2016. – Суми, Україна, 2016. – С. 121.

15. Khelemelia O.V. The influence of the external magnetic field on energy losses of a charged particle in an electron gas / **O.V. Khelemelia**, R.I. Kholodov // International Conference-School on Plasma Physics and Controlled Fusion. ICP-PCF'2016. – Kharkiv. Ukraine. September 12-15, 2016. – P. 74.

16. Хелемеля О.В. Гальмівна здатність електронного газу в зовнішньому магнітному полі / **О.В. Хелемеля**, Р.І. Холодов // Тези доповідей XXIII щорічної наукової конференції інституту ядерних досліджень НАН України, 01-05 лютого 2016: тези доповідей. – Київ. Україна, 2016. – С. Д2.

17. Хелемеля О.В. Вплив сильного магнітного поля на гальмівну здатність електронного газу / **О.В. Хелемеля** // Матеріали III міжрегіональної науково-практичної конференції молодих учених. Сучасні проблеми експериментальної та теоретичної фізики. – СПЕТФ'2017. – Суми, Україна, 2017. – С. 75-76.

18. Хелемеля О.В. Енергетичні втрати важкої зарядженої частинки в замагніченому електронному газі / **О.В. Хелемеля**, Р.І. Холодов // XXIV щорічна наукова конференція інституту ядерних досліджень НАН України. – Київ. Україна, 13-14 квітня 2017. – С. 182.

19. Хелемеля О.В. Енергетичні втрати протона в замагніченому електронному газі / **О.В. Хелемеля** // Тезисы докладов XVI конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям, 20-23 марта 2018. – Харьков. Украина, 2018. – С. 113.

SUMMARY

Khelemelia O.V. Energy losses of a massive charged particle in a magnetized electron gas with anisotropic temperature. – Manuscript.

The thesis for a degree of candidate in physics and mathematics (doctor of philosophy), speciality 01.04.02 – theoretical physics. – Institute of Applied Physics, National Academy of Sciences of Ukraine, Sumy, 2018.

The thesis is devoted to theoretical investigation of the interaction a massive charged particle with an electron gas with anisotropic distribution of velocities in an external magnetic field.

There are next tasks are solved in the thesis to achiev the goal: analytic expressions of real and imaginary parts of susceptibility of electron gas with isotropic and anisotropic velocity distribution in the external magnetic field within quantum field method are carried out; numerical calculation of dependency of energy losses of massive charged particle on its velocity is performed using obtained expressions of the susceptibility; influence of isotropic and anisotropic temperature of electron gas on energy losses of the ion is investigated; influence of the external magnetic field on stopping power of the electron gas with anisotropic velocity distribution is studied.

A quantum-field method is proposed to use to study the process of electron cooling. The using of quantum-field approach to determine of energy losses of the charged particle in the electron gas with anisotropic temperature is reasonable and apposite. One can to obtain a full expression of energy losses within quantum field method based on the first principles.

Analytic expressions of real and imaginary parts of susceptibility of the electron gas with anisotropic velocity distribution within quantum field method are calculated for the first time. Numerical calculation of dependency of energy losses of the massive charged particle on its velocity is performed using obtained expressions of the susceptibility.

In the absence of an external magnetic field:

a) with isotropic electron distribution of velocities the maximum of the stopping power increases proportionally to the decreasing of temperature of the electron gas. The position of the maximum corresponds to the value of the velocity of the charged particle, which is $2^{1/2}$ times more in comparison with the average thermal velocity of the electrons;

b) with the anisotropic distribution of electrons of velocities, when the longitudinal temperature of the electron gas is 3 orders less than the transverse one, the maximum of the stopping power exceeds 3 times the value at isotropic distribution. The position of the maximum of the stopping power is determined by the thermal velocity of the electrons, and when it is reduced, it shifts to a region of lower velocities.

4. In the case of a strong external magnetic field, when completely suppressed transverse motion of electrons, it is shown that:

a) with isotropic distribution of electrons of velocities the maximum of the stopping power is 2.4 times less in comparison with the case without a magnetic field;

b) with anisotropic distribution of electrons of velocities, when the longitudinal temperature of the electron gas is 3 orders less than the transverse one, the maximum of stopping power is 300 times more in comparison of the isotropic distribution. The position of the maximum corresponds to the value of the velocity of the charged particle, which is $2^{1/4}$ times more than the thermal longitudinal velocity of the electrons.

The cooling of the massive charged particle (energy transfer) in the strong external magnetic field by electrons with anisotropic velocity distribution is performed more faster (the value of the maximum of the stopping power is more) and deeply (the position of the maximum of the stopping power corresponds to lower velocities), the allowable temperature is lower.

Key words: electron gas, energy losses, stopping power, isotropic and anisotropic temperature, magnetic field, quantum-field method, susceptibility.

The publication list of the applicant of PhD thesis. 1. The scientific works containing the main published scientific result:

1. Khelemelya O.V. Dielectric model of energy losses by a massive charged particle moving through cold magnetized plasma / **O.V. Khelemelya**, R.I. Kholodov, V.I. Miroshnichenko // Ukr. J. Phys. – 2013. – Vol. 58. – No. 8. – P. 725-734.

2. Khelemelya O.V. Quantum field methods in the electron cooling/ **O.V. Khelemelya**, R.I. Kholodov // Problems of atomic science and technology. – 2013. – No. 3(85). – P. 53-57.

3. Khelemelia O.V. The influence of the anisotropic temperature of the electron gas on energy losses of a charged particle in a plasma / **O.V. Khelemelia**, R.I. Kholodov // Problems of atomic science and technology. – 2015. – № 1(95). – P. 69-72.

4. Khelemelia O.V. Stopping power of an electron gas with anisotropic temperature / **O.V. Khelemelia**, R.I. Kholodov // Modern Physics Letters A. – 2016. - Volume: 31. - Number: 13

5. Khelemelia O.V. The influence of the external magnetic field on energy losses of a charged particle in an electron gas / **O.V. Khelemelia**, R.I. Kholodov // Problems of atomic science and technology. – 2017. – №1. – P.68-71.

2. The scientific works of an approbatory character:

6. Khelemelya O.V. Electron cooling force calculation in plasma dielectric frame / **O.V. Khelemelya** // Trans-European School of High Energy Physics – TESHEP'2011, 7-14 July 2011: proceedings. – Alushta, Crimea, Ukraine, 2011. – P. 177-178.

7. Khelemelya O.V. Energy losses of a massive charged particle in a magnetized electron plasma / **O.V. Khelemelya** // Proceeding of I inter-regional scientific conference of young scientists. Modern problems of experimental and theoretical physics. – SPETF'2012. – Sumy, Ukraine, 2012. – P. 75-76.

8. Khelemelia O.V. Calculation of the Electron Thermal Plasma Permittivity / **O.V. Khelemelia** // 12-th International Conference on Laser and Fiber-Optical Network Modeling (LFNM), 2-4 October 2013: proceedings. – Sudak, Crimea, Ukraine, 2013. – P. 55-57

9. Khelemelia O.V. Energy losses of a charged particle in an electron gas with including of a temperature. / **O.V. Khelemelia**, R.I. Kholodov // XXI Annual Scientific Conference of the Institute of Nuclear Research of the National Academy of Sciences of Ukraine: proceeding. – Kyiv. Ukraine, 2014. – P. 157.

10. Khelemelia O.V. The Influence of the Anisotropic Temperature of the Electron Gas on Energy Losses of Charged Particle in a Plasma / **O.V. Khelemelia**, R.I. Kholodov // International Conference-School on Plasma Physics and Controlled Fusion. ICPPCF'2014. – Kharkiv. Ukraine. September 15-18, 2014. – P. 62.

11. Khelemelia O.V. Energy losses of a heavy charged particle in a plasma with taking into account the temperature of the electron gas / **O.V. Khelemelia**, R.I. Kholodov // Multiscale Modeling of Physical Processes in Condensed Matter, 21-22 October 2014: proceedings. - Sumy, Ukraine, 2014. – P. 28

12. Khelemelia O.V. The influence of an anisotropic temperature on stopping power in a plasma / **O.V. Khelemelia**, R.I. Kholodov // XXII Annual Scientific Conference of the Institute of Nuclear Research of the National Academy of Sciences of Ukraine, 26-30 January 2015: proceeding. – Kyiv. Ukraine, 2015. – P. 156-158

13. Khelemelia O.V. Calculation of energy losses of a massive charged particle in magnetized electron gas within quantum field method / **O.V. Khelemelia**, R.I. Kholodov // XIV conference on high-energy physics, nuclear physics and accelerators, 22-25 March 2016: Proceeding. – Kharkov, Ukraine, 2016. – P. 112.

14. Khelemelia O.V. Susceptibility of an electron gas in an external magnetic field / **O.V. Khelemelia** // II inter-regional scientific conference of young scientists. Modern problems of experimental and theoretical physics. – SPETF'2016. – Sumy, Ukraine, 2016. – P. 121.

15. Khelemelia O.V. The influence of the external magnetic field on energy losses of a charged particle in an electron gas / **O.V. Khelemelia**, R.I. Kholodov // International Conference-School on Plasma Physics and Controlled Fusion. ICPPCF'2016. – Kharkiv. Ukraine. September 12-15, 2016. – P. 74.

16. Khelemelia O.V. Stopping power of an electron gas in an external magnetic field / **O.V. Khelemelia**, R.I. Kholodov // Annual Scientific Conference of the

Institute of Nuclear Research of the National Academy of Sciences of Ukraine, 01-05 February 2016: proceeding. – Kyiv. Ukraine, 2016. – P. D2.

17. Khelemelia O.V. Influence of a strong magnetic field on a stopping power of an electron gas / **O.V. Khelemelia** // III inter-regional scientific conference of young scientists. Modern problems of experimental and theoretical physics. – SPETF'2017. – Sumy, Ukraine, 2017. – P. 75-76.

18. Khelemelia O.V. Energy losses of a massive charged particle in a magnetized electron gas / **O.V. Khelemelia**, R.I. Kholodov // XXIV Annual Scientific Conference of the Institute of Nuclear Research of the National Academy of Sciences of Ukraine, 13-14 April 2017: proceeding. – Kyiv. Ukraine, 2017. – P. 182.

19. Khelemelia O.V. Energy losses of a proton in a magnetized electron gas / **O.V. Khelemelia** // XVI conference on high-energy physics, nuclear physics and accelerators, 20-23 March 2018: Proceeding. – Kharkov, Ukraine, 2018. – P. 113.

ЗМІСТ

	Стор.
ВСТУП	14
РОЗДІЛ 1. ВТРАТИ ЕНЕРГІЇ ЗАРЯДЖЕНОЇ ЧАСТИНКИ В ЕЛЕКТРОННОМУ ГАЗІ	25
1.1. Енергетичні втрати заряджених частинок в середовищі	25
1.2. Електронне охолодження	26
1.3. Теорія електронного охолодження	29
1.3.1. Класичні теорії	29
1.3.2. Квантово-польовий підхід	36
1.4. Висновки до розділу 1	39
РОЗДІЛ 2. КВАНТОВА ТЕОРІЯ ПОЛЯ В ЗАДАЧІ ЕЛЕКТРОННОГО ОХОЛОДЖЕННЯ	40
2.1. Вступ	40
2.2. Втрати енергії в холодній магнітоактивній плазмі	41
2.2.1. Постановка задачі.	41
2.2.2. Енергетичні втрати частинки в плазмі без зовнішнього магнітного поля	49
2.2.3. Випадок повздовжнього до магнітного поля руху $\vec{V}_i \uparrow \vec{H}(\alpha = 0)$. .	52
2.2.4. Випадок поперечного до магнітного поля руху $\vec{V}_i \perp \vec{H}(\alpha = \pi/2)$. .	55
2.2.5. Загальний випадок	59
2.3. Квантово-польові методи в задачі електронного охолодження	67
2.3.1. Квантові ефекти в електронному охолодженні.	67
2.3.2. Енергетичні втрати в рамках квантово-польового підходу.	68
2.4. Висновки до розділу 2	73
РОЗДІЛ 3. ВПЛИВ ТЕМПЕРАТУРИ НА ГАЛЬМІВНУ ЗДАТНІСТЬ ЕЛЕКТРОННОГО ГАЗУ	75
3.1. Вступ	75

3.2. Ізотропний розподіл за швидкостями	76
3.2.1. Поляризаційний оператор	76
3.2.2. Наближення великих швидкостей налітаючої частинки.	81
3.2.3. Наближення малих швидкостей налітаючої частинки.	83
3.2.4. Чисельний розрахунок	85
3.3. Анізотропний розподіл за швидкостями	87
3.3.1. Поляризаційний оператор	87
3.3.2. Наближення великих швидкостей налітаючої частинки	90
3.3.3. Наближення малих швидкостей налітаючої зарядженої частинки	91
3.3.4. Чисельний розрахунок	92
3.4. Висновки до розділу 3	98

РОЗДІЛ 4. ГАЛЬМІВНА ЗДАТНІСТЬ ЗАМАГНІЧЕНОГО ЕЛЕКТРОННОГО ГАЗУ З АНІЗОТРОПНОЮ ТЕМПЕРАТУРОЮ	100
4.1. Вступ	100
4.2. Діелектрична сприйнятливість замагніченого електронного газу	100
4.2.1. Діелектрична сприйнятливість	100
4.2.2. Функція розподілу n_{ν,p_z}	102
4.2.3. Інтегрування по змінній p_z	105
4.2.4. Спецфункція $\Lambda_{\nu\nu'}(a)$	106
4.2.5. Сумування діелектричної сприйнятливості по ν	116
4.3. Гальмівна здатність	122
4.3.1. Наближення великих швидкостей налітаючої частинки	122
4.3.2. Чисельний розрахунок	126
4.4. Висновки до розділу 4	130
ВИСНОВКИ	132
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	133
ДОДАТОК	144

ВСТУП

Актуальність теми

Вивченню процесів, які відбуваються при взаємодії пучків частинок з полями і речовиною, нині приділяється значна увага як в Україні, так і за її межами. Так, зокрема, наукова програма міжнародного мегапроекту FAIR (Facility for Antiproton and Ion Research) — нового унікального прискорювача для досліджень з антипротонами та іонами, що буде побудований міжнародними зусиллями поблизу Дармштадту, Німеччина, — передбачає надання вичерпного і кількісного розуміння адронної матерії, включаючи дослідження фундаментальних симетрій та взаємодій, а також дослідження динаміки багаточастинкових систем з урахуванням колективних ефектів, які відіграють важливу, а часто навіть вирішальну роль на всіх рівнях структури матерії. В рамках проекту FAIR вперше планується побудова накопичувального кільця антипротонів HESR (High Energy Storage Ring) з використанням електронного охолоджувача з пучком релятивістських електронів (5 MeV/частинку), що дасть змогу досягти рекордних значень світимості в експериментах із зіткнення протонів та антипротонів.

Швидкість протікання електронного охолодження та кінцева температура охолоджених важких заряджених частинок зумовлюються впливом зовнішнього однорідного магнітного поля, яке використовується в електронних охолоджувачах для запобігання розльоту електронів, та розподілом електронів за швидкостями, температурою.

Електронне охолодження — високоефективний метод стиснення фазового об'єму пучків важких заряджених частинок, який широко використовується у всьому світі на накопичувальних установках. На сучасному етапі існують кілька теорій, теорія парних зіткнень та діелектрична модель, які використовуються для опису взаємодії важкої зарядженої частинки з електронним газом в зовнішньому магнітному полі. Врахування в рамках

даних підходів пливу температури електронів, зокрема, її анізотропії, та зовнішнього магнітного поля призводить до виникнення цілого ряду проміжних напівемпіричних параметрів у виразі для енергетичних втрат та необхідності залучення процедур обрізання та зшивки. До того ж, аналітичний вираз для втрат енергії вдається отримати лише в ряді наближень, що не відповідають умовам реального експерименту.

В даному дисертаційному дослідженні запропоновано використовувати для опису взаємодії важкої зарядженої частинки з електронним газом методи квантової теорії поля. Вираз для енергетичних втрат, отриманий методами квантової теорії поля, не містить у собі розходжень, а мінімальний та максимальний прицільні параметри визначаються із перших принципів. Нині побудова та розвиток закінченої теорії, яка б дала змогу описувати процес взаємодії іона із замагніченим електронним газом з анізотропним розподілом за швидкостями є дуже актуальною як з наукового погляду, так і з погляду прикладної значущості.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами

Дисертаційна робота виконана у відділі № 40 «Квантової електродинаміки сильних полів» Інституту прикладної фізики НАН України і є частиною досліджень, які проводилися за темами: «Квантово-електродинамічні і колективні процеси в надсильних полях, зокрема при зіткненнях важких іонів та в задачі електронного охолодження» (державний реєстраційний номер 0111U010613, термін виконання 2012-2016 рр.) та «Квантово-польові підходи в задачах зіткнення важких іонів і електронів в електромагнітних полях» (державний реєстраційний номер 0116U005848, термін виконання 2017-2021 рр.) та в рамках меморандуму про співробітництво між Інститутом прикладної фізики НАН України та Дослідницьким центром Julich GmbH, Німеччина (R-R EDV 11.038).

Мета і завдання дослідження

Метою роботи є дослідження взаємодії важкої зарядженої частинки з

електронним газом з анізотропним розподілом за швидкостями в зовнішньому магнітному полі.

Для досягнення цієї мети в дисертації вирішуються наступні завдання:

— визначається явний вигляд діелектричної сприйнятливості з урахуванням ізотропного та анізотропного розподілів електронів за швидкостями та впливу зовнішнього магнітного поля.

– використовуючи явний вигляд діелектричної сприйнятливості, знаходиться залежність енергетичних втрат важкої зарядженої частинки від її швидкості;

– досліджується вплив ізотропної та анізотропної температур електронного газу на енергетичні втрати іона;

— вивчається вплив магнітного поля на гальмівну здатність електронного газу з анізотропним розподілом за швидкостями.

Об'єктом дослідження є процес взаємодії важкої зарядженої частинки з електронним газом у зовнішньому магнітному полі.

Предметом дослідження є вивчення впливу анізотропного розподілу електронів за швидкостями та зовнішнього магнітного поля на енергетичні втрати важкої зарядженої частинки.

Методи дослідження

При виконанні роботи використовується математичний апарат квантової теорії поля, фізики плазми, чисельні методи та алгоритми паралельного програмування для багатопроцесорних комп'ютерних систем.

Наукова новизна отриманих результатів

1. Вперше знайдено аналітичні вирази для дійсної та уявної частин діелектричної сприйнятливості замагніченого електронного газу з анізотропним розподілом за швидкостями в рамках квантово-польового підходу.

2. Використовуючи явний вигляд діелектричної сприйнятливості, чисельно побудовано залежність енергетичних втрат важкої зарядженої частинки від швидкості з врахуванням впливу анізотропної температури електронного газу та зовнішнього однорідного магнітного поля.

3. У випадку відсутності зовнішнього магнітного поля показано, що:

а) при ізотропному розподілі електронів за швидкостями максимум гальмівної здатності зростає пропорційно до зменшення температури електронного газу. Положення максимуму відповідає значенням швидкості зарядженої частинки, яка в $2^{1/2}$ раз більша за середню теплову швидкість електронів;

б) при анізотропному розподілі електронів за швидкостями, коли повздовжня температура електронного газу менша на 3 порядки від поперечної, максимум гальмівної здатності в 3 рази перевищує значення при ізотропному розподілі. Положення максимуму гальмівної здатності визначається значенням середньої повздовжньої теплової швидкості електронів, і при її зменшенні зміщується в область менших швидкостей.

4. У випадку сильного зовнішнього магнітного поля, коли повністю подавлений поперечний рух електронів, показано, що:

а) при ізотропному розподілі електронів за швидкостями максимум гальмівної здатності менший в 2.4 рази в порівнянні з випадком без магнітного поля;

б) при анізотропному розподілі електронів за швидкостями, коли повздовжня температура електронного газу менша на 3 порядки від поперечної, максимум гальмівної здатності в 300 разів перевищує значення при ізотропному розподілі. Положення максимуму відповідає значенням швидкості зарядженої частинки, яка в $2^{1/4}$ раз більша за середню теплову повздовжню швидкість електронів.

Практичне значення отриманих результатів

Здобуті в дисертації аналітичні вирази для дійсної та уявної частин

діелектричної сприйнятливості замагніченого електронного газу з анізотропним розподілом за швидкостями в рамках квантово-польового підходу та отримані залежності енергетичних втрат важкої зарядженої частинки від впливу зовнішнього магнітного поля та анізотропної температури є простими для розуміння й аналізу, а отримані результати можуть бути використані для опису широкого кола задач, зокрема для задачі електронного охолодження іонів.

Результати дисертаційної роботи можуть бути використані в ІПФ НАН України, ІТФ НАН України, ННЦ “ХФТІ” НАН України, Київському національному університеті ім. Тараса Шевченка, Харківському національному університеті ім. В.Н. Каразіна, FAIR (Facility for Antiproton and Ion Research), HESR (High Energy Storage Ring), HIRFL-CSR (Cooler Storage Ring of Heavy Ion Research Facility), та інших наукових центрах.

Особистий внесок здобувача

Основні результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно або при його безпосередній участі. В роботі [1] в рамках діелектричної моделі знайдено втрати енергії для зарядженої частинки у нескінченній замагніченій електронній плазмі. В роботі запропоновано визначати явний вигляд кулонівського логарифму, виходячи з принципу відповідності, що дало змогу не залучати феноменологічного параметра обрізання для зшивки з теорією парних зіткнень. Отримано аналітичні вирази для втрат енергії у випадку поздовжнього та поперечного магнітному полю рухів зарядженої частинки. Аналітичні результати підтверджено чисельними розрахунками, проведеними для випадку руху зарядженої частинки під довільним кутом до магнітного поля, довільної напруженості. Проведено порівняння втрат енергії зарядженою частинкою, отриманих в рамках діелектричної моделі, з результатами квантової теорії поля. В роботі [2] аргументовано доцільність використання квантово-польового підходу для опису електронного охолодження. Проаналізовано вплив магнітного поля з врахуванням анізотропного розподілу за швидкостями електронного газу. Показано, що при наявності достатньо сильного магнітного

поля головну роль в електронному охолодженні важких іонів відіграє повздовжня складова теплового руху електронів. Проведена оцінка квантових ефектів в електронному охолодженні. В роботі [3] отримано аналітичні вирази для уявної та дійсної частин діелектричної сприйнятливості електронного газу з анізотропним розподілом за швидкостями в рамках квантово-польового підходу. Чисельно отримана залежність енергетичних втрат іоном в електронному газі для випадків: 1) з ізотропною температурою; 2) з анізотропною температурою, коли іон співнаправлений з пучком електронів. В роботі [4] чисельно отримана залежність енергетичних втрат іоном в електронному газі з анізотропним розподілом за швидкостями для довільних кутів між напрямками руху іона та електронного пучка. Показано, що в наближеннях малих та великих швидкостей вирази для втрат енергії та діелектричної сприйнятливості переходять в класичні при переході $\hbar \rightarrow 0$. В роботі [5] в рамках квантово-польового підходу враховано вплив магнітного поля та температури електронного газу на енергетичні втрати важкої зарядженої частинки. Отримано аналітичні вирази для дійсної та уявної частин діелектричної сприйнятливості електронного газу в зовнішньому однорідному магнітному полі.

З науковим керівником обговорювалися задачі в плані постановки, методів розв'язку, способів обчислення конкретних величин і аналізу отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації

Матеріали дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на наукових семінарах теоретичного відділу в Інституті прикладної фізики НАН України, на міжнародних та вітчизняних науково-технічних конференціях:

- Trans-European School of High Energy Physics, Alushta, Crimea, Ukraine (2011);
- 12-th International Conference on Laser and Fiber-Optical Network Modeling, Sudak, Crimea, Ukraine (2013);

- Щорічна наукова конференція Інституту ядерних досліджень НАН України, Київ (2014-2017);
- International Conference and School on Plasma Physics and Controlled Fusion, Харків (2014, 2016) ;
- Конференція з фізики високих енергій, ядерної фізики та прискорювачів, Харків (2016, 2018);
- Multiscale Modeling of Physical Processes in Condensed Matter, Інститут прикладної фізики НАН України, Суми (2014);
- Матеріали міжрегіональної науково-практичної конференції молодих учених. Сучасні проблеми експериментальної та теоретичної фізики, Суми, Україна (2012, 2016, 2017);

Роботи [1–3] ввійшли до циклу наукових праць «Дослідження взаємодії частинки з електронним замагніченим газом методом квантової теорії поля», що був відзначений щорічною премією Президента України для молодих вчених 2016 року, згідно указу Президента України №509/206 від 17 листопада 2016 року.

Публікації

Основні результати дисертації опубліковані в 19 наукових роботах, з яких 5 статей опубліковано в спеціалізованих наукових журналах, що входять до переліку ДАК МОН України, і 14 у вигляді тез доповідей у збірниках наукових праць конференцій.

Структура дисертації

Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків і списку використаних джерел. Об'єм дисертації складає 147 сторінок, зокрема, основний текст викладений на 119 сторінках та включає в себе 20 рисунків.

У **вступі** обґрунтовується актуальність вибраної теми, формулюється мета і визначаються основні завдання дослідження, відображається новизна отриманих результатів, їх наукове, практичне значення та апробація, визначається особистий внесок здобувача.

В розділі 1 "Втрати енергії зарядженої частинки в електронному газі" здійснено аналіз сучасного стану досліджуваних проблем. Проведено огляд літератури, який присвячений вивченню взаємодії зарядженої частинки з електронним газом з анізотропним розподілом за швидкостями в зовнішньому магнітному полі, зокрема, в експериментах з електронним охолодженням. Детально проаналізовані роботи, присвячені вивченню процесів гальмування іона в плазмі методами парної теорії, діелектричної (плазмової), квантової теорії поля та чисельними методами. Кванто-польовий підхід включає в себе як частинні випадки і результати парної теорії, і діелектричної моделі. Використання квантово-польового підходу дає нам можливість уникнути процедури, зшивки, оскільки відсутнє розходження при малих та великих прицільних параметрах у визначенні гальмівної здатності електронного газу, характерних для класичних теорії парних зіткнень та плазмової моделі. Квантово-польовий підхід дає можливість дослідити з перших принципів вплив на енергетичні втрати важких заряджених частинок як зовнішнього магнітного поля, так і анізотропного розподілу електронів за швидкостями. Аналітичні результати, отримані в загальноприйнятих наближеннях в рамках квантово-польових методів, потребують доповнення чисельними методами.

В розділі 2 "Квантова теорія поля в задачі електронного охолодження" обґрунтовується доцільність використання квантово-польових методів при вивченні взаємодії важкої зарядженої частинки з електронним газом у зовнішньому магнітному полі. Квантово-польовий підхід дає можливість з перших принципів дослідити явище електронного охолодження. В рамках даного методу вдається отримати загальний вираз для втрат енергії важкою зарядженою частинкою в замагніченому електронному газі з врахуванням розподілу за швидкостями електронів, уникаючи при цьому залучення емпіричного визначення значення кулонівського логарифму. Вираз для енергетичних втрат при великих та малих прицільних параметрах сходиться. В підрозділі 2.2. розглянуто взаємодію важкої зарядженої частинки з електронним газом в рамках діелектричної моделі. Запропоновано

натомість традиційній процедурі зшивки, що вимагає залучення як проміжного феноменологічного параметру обрізання, так і результатів теорії парних зіткнень, використовувати принцип відповідності для визначення явного виду кулонівського логарифму, коли знайдені результати у більш складному випадку при граничному переході не суперечать більш простій теорії. Аналітично знайдені вирази втрат важкою зарядженою частинкою при русі в повздовжньому та в поперечному до магнітного поля напрямках, відповідно; показано, що використовуючи метод відповідності, при «виключенні» зовнішнього магнітного поля, переходимо до більш простого випадку без магнітного поля; проведено аналіз та чисельні розрахунки вкладу від колективних ефектів в рамках діелектричної моделі при русі пробної частинки під довільним кутом ($0 < \alpha < \pi/2$) для різних значень зовнішнього однорідного магнітного поля. Отримані результати порівняні з результатами отриманими в рамках більш загального методу квантової теорії поля. В підрозділі 2.3. проведена оцінка квантових поправок в силу тертя, що діє на протон в замагніченому електронному газі, зокрема, пов'язаних з температурою виродження електронного газу та переходами електронів між рівнями Ландау. Представлені основні кроки при використанні квантово-польового методу у визначенні енергетичних втрат важкої зарядженої частинки в електронному газі у зовнішньому магнітному полі.

В розділі 3 "Вплив температури на гальмівну здатність електронного газу" показано, що методи квантової фізики дозволяють враховувати вплив температури електронного газу на енергетичні втрати налітаючого іона. При цьому електрони можуть мати як ізотропний, так і анізотропний розподіл за швидкостями. Так як важка заряджена частинка найефективніше втрачає свою енергію при швидкостях V_i близьких до теплових швидкостей електронів v_e , а аналітичні розв'язки для гальмівної здатності електронного газу можна знайти лише в декількох випадках: при великих $V_i \gg v_e$ і малих $V_i \ll v_e$ швидкостях налітаючої частинки, то область, де частинка втрачає максимальну кількість енергії, найчастіше досліджується чисельно або отримується екстраполяцією

аналітичних результатів вищезгаданих наближень.

В експериментах з електронного охолодження важких заряджених частинок електронний пучок має виражений анізотропний розподіл за швидкостями спричинений електростатичним прискорення електронів. Як наслідок, повздовжня температура, розкид за швидкостями в напрямку прискорення, зменшується, що є наслідком з теореми Ліувілля про збереження фазового простору пучка електронів. Анізотропія температури електронного газу є однією з причин, так званого, швидкого електронного охолодження, в результаті якого пришвидшується в кілька разів обмін енергією між накопичуваними іонами та електронним газом. В підрозділі 3.2. досліджено вплив ізотропної температури електронного газу T_e на енергетичні втрати. Знайдено аналітичні вирази для діелектричної сприйнятливості електронного газу з ізотропним розподілом за швидкостями. Виконані аналітичні розрахунки втрат енергії важкої зарядженої частинки в наближенні великих та малих швидкостей налітаючої частинки. Чисельно побудована залежність гальмівної здатності електронного газу від швидкості налітаючої частинки для різних температур. Результати чисельного розрахунку добре узгоджуються з аналітичними наближеними обчисленнями та експериментальними даними. В підрозділі 3.3. розвинуто квантово-польовий підхід для врахування впливу анізотропної температури електронного газу на енергетичні втрати зарядженої частинки. Розрахована діелектрична проникність електронного газу для максвелівського двох-температурного розподілу за швидкостями. Представлені аналітичні результати для гальмівної здатності електронного газу в наближеннях: а) великих $V_i \gg v_{e\perp,\parallel}$ та малих $V_i \ll v_{e\perp,\parallel}$ швидкостей налітаючої частинки. Приводяться результати чисельного розрахунку виразу для енергетичних втрат, отриманого в рамках квантово-польового підходу. Отримано залежність сили тертя від швидкості налітаючої частинки для довільних значень температури та кутів вльоту. Результати чисельного розрахунку в рамках квантово-польового методів порівнюються з результатами, отриманими в рамках діелектричної моделі та експериментальними даними,

отриманими на установці NAR-M при дослідженні впливу анізотропного розподілу електронів на силу тертя.

В розділі 4 "Гальмівна здатність замагніченого електронного газу з анізотропною температурою" розвинуто квантово-польовий формалізм для дослідження енергетичних втрат важкої зарядженої частинки в замагніченому електронному газі з врахуванням анізотропного розподілу електронів за швидкостями. В експериментах з електронного охолодження для утримання електронного пучка від розльоту використовують зовнішнє однорідне магнітне поле. Магнітне поле спрямовують так, щоб напрями вектора магнітної індукції та вісь електронного пучка співпадали. Квантово-польовий підхід із перших принципів дає можливість врахувати вплив на енергетичні втрати як температури електронного газу, так і зовнішнього магнітного поля. Вплив перелічених факторів є ключовим для експериментів з використанням електронного охолодження В підрозділі 4.2. знайдено аналітичний вираз для діелектричної сприйнятливості магнітоактивного електронного газу з анізотропним розподілом електронів за швидкостями. В підрозділі 4.3. визначено в рамках квантово-польового підходу енергетичні втрати важкої зарядженої частинки. Отримано аналітичний вираз для гальмівної здатність замагніченого електронного газу в наближенні великих швидкостей налітаючого іона ($V_i/v_e \gg 1$). Використовуючи отримані вирази для діелектричної сприйнятливості в підрозділі 4.2., проведено чисельний розрахунок сили тертя, що діє на важку заряджену частинку, для електронів з ізотропним та анізотропним розподілом за швидкостями в зовнішньому магнітному полі. Проведено аналіз впливу сильних магнітних полів ($B \sim 100 T$) та температури електронів (ізотропний та анізотропний розподіл за швидкостями).

РОЗДІЛ 1

ВТРАТИ ЕНЕРГІЇ ЗАРЯДЖЕНОЇ ЧАСТИНКИ В ЕЛЕКТРОННОМУ ГАЗІ

1.1. Енергетичні втрати заряджених частинок в середовищі

Енергетичні втрати заряджених частинок в речовині активно досліджуються з минулого століття. Їх вивчення почалося з робіт [6, 7]. Пізніше в роботі [8] було використано квантовий підхід для пояснення процесу обміну енергією зі звязаними електронами. Доповнила квантовий метод робота [9].

В роботі [10] проведена оцінка швидкості поляризації класичного електронного середовища мішені зарядженою часткою. Ця робота була розширена для виродженого електронного газу у праці [11], і було показано, що для повільних налітаючих заряджених частинок енергетичні втрати пропорційні швидкості цих частинок.

Спробою повного описання процесу проходження зарядженої частинки через квантований нерелятивістський електронний газ була робота [12]. В даній роботі розглянуто взаємодію нерелятивістських частинок з вільними електронами та проведено повний глибокий аналіз процесу енергетичних втрат з наступними припущеннями:

- Вільний електронний газ складається з електронів при нульовій температурі (одиночні електрони описуються плоскими хвилями) на фіксованому однорідному позитивному фоні, тобто з загальним нейтральним зарядом.
- Початковий електронний газ має постійну густину.
- Взаємодія зарядженої частинки з однорідним електронним газом є невеликим збуренням електронної густини .

Важливим етапом у розвитку вивчення енергетичних втрат були роботи з використанням чисельних методів. Вони доповнили теоретичні напрацювання, так, наприклад, використання чисельних методів дозволило включити більш

реалістичну модель атомів Харті-Фока. Піонерськими в цьому напрямку були роботи [13, 14].

Огляд сучасного стану розвитку теорії енергетичних втрат було зроблено в роботах [15–17].

Наразі існує числена кількість робіт, що дають відповідь на окремі частинні питання, пов'язані з різноманітними аспектами енергетичних втрат зарядженими частинками в середовищі. Проте, теоретичне вивчення процесу взаємодії між зарядженими частинками залишається актуальним, оскільки сучасні експерименти на зустрічних пучках розширюють область досліджень та ставлять нові запитання, що потребують відповідей.

1.2. Електронне охолодження

При проведенні будь-яких дослідів з використання пучків заряджених частинок принципово важливо вміти стискувати пучки, зменшувати їх розміри та зменшити розходження по імпульсу (по величині та за напрямком) цих частинок, іншими словами, - вміти «охолоджувати» потоки швидких заряджених частинок, знижуючи їх ефективну температуру в супроводжуючій системі. Цього, проте, не можна досягти застосуванням довільних параметрів, тобто незалежних від руху окремих частинок пучка, зовнішніх електромагнітних полів. В цьому випадку справедливе твердження – частковий випадок теореми Ліувіля, - що густина пучка в шестимірному фазовому просторі (простір узагальнених координат) величина постійна. За допомогою фокусування і прискорення в будь-яких комбінаціях можна лише змінити форму фазового об'єму, який займають заряджені частинки, а не змінити його величину чи підвищити його фазову густину. Будь-які аберації можуть, звичайно, сильно деформувати форму об'єму, зробити її настільки складною, що ефективна фазова густина зменшиться. Щоб досягти підвищення фазової густини можна використати сили дисипативного характеру. Логічно найпростішим виявляється використання для цих цілей дисипативних сил, аналогічних звичайному тертю і направлених проти швидкості кожної

частинки. Якщо при цьому зовнішнє джерело енергії (прискорювальна система прискорювача чи накопичувача) додає енергію всім частинкам пучка, точно компенсуючи енергетичні втрати рівноважної частинки, то відхилення частинок від рівноважного руху, при правильному виборі структури накопичувача, будуть з часом зменшуватись, тобто бетатронні і енергетичні коливання будуть затухати [18,19].

Для протонів, антипротонів та більш важких іонів, навіть для іонів урану особливо ефективним виявився метод охолодження пучків заряджених частинок, який не пов'язаний з енергетичними втратами рівноважних (центральных) частинок пучка [20].

Цей метод – метод електронного охолодження – був запропонований в 60-их рр. Новосибірським вченим Будкером Г.І. [18]. Більш детально теоретично та практично вивченим він був в Новосибірському Інституті ядерної фізики СО АН СРСР рядом вчених: Будкер Г.І., Дербеньов Я.С., Диканський Н.С., Мешков І.Н., Пархомчук В.В., Пестриков Д.В., Скринский А.Н. та ін. [19,21–29].

У найпростішому випадку ідея полягає в наступному. В одному з прямолінійних проміжків накопичувача, в якому циркулює пучок важких частинок, наприклад, протонів, паралельно протонному пучку пропускається інтенсивний пучок електронів з тією ж самою середньою швидкістю і малим розподілом по імпульсам. Тоді на спільній ділянці траєкторії в системі спокою пучка «гарячий» протонний газ знаходиться в «холодному» електронному газі і за рахунок кулонівської взаємодії охолоджується. Час охолодження відповідає часу релаксації протонної температури. В результаті фазовий об'єм пучка зменшується за всіма ступенями свободи і пучок стискається. Це стиснення продовжуватиметься до того часу, доки протонна температура не врівноважиться з електронною в системі спокою пучка [19].

Метод електронного охолодження став загальноприйнятим в експериментах на зустрічних пучках заряджених іонів, оскільки дає можливість значно покращити параметри пучків [31–34]. Цікавим в плані взаємодії важкої зарядженої частинки із електронним газом є проект FAIR (Facility for Antipro-



Рис. 1.1. Типова схема для електронного охолоджувача [30].

ton and Ion Research, Дармштадт), де буде використовуватись електронний охолоджувач для накопичення антипротонів. Завдяки поєднанню двох способів зменшення фазового об'єму експериментальних пучків заряджених частинок, електронному та стохастичному охолодженню, в експерименті PANDA (Antiproton Anihilation at Darmstadt) на накопичувальному кільці HESR (High Energy Storage Ring) буде досягнуто значень розкиду по імпульсам для антипротонів $\Delta p/p \sim 10^{-5}$ [35]. Накопичення антипротонів дуже складний процес. З одного боку, кількість антипротонів мала (коефіцієнт конверсії протонів у антипротони в ядерних реакціях на мішені не перевищує 10^{-7}). З іншого боку, антипротони народжуються з первинного протонного пучка в широкому тілесному куті і з великим розкидом енергії. Саме тому процес охолодження для протонів у накопичувальних кільцях є бажаним, а для антипротонів життєво важливим [36].

Завдяки електронному охолодженню у фізиці елементарних частинок перед вченими відкриваються цікаві можливості у вивченні протон-антипротонних взаємодій при проведенні експериментів на зустрічних пучках з неперервним охолодженням в області до 9 GeV в пучкові [37]. Також нові можливості відкриваються у вивченні протон-антипротонних

(антипротонно-ядерних) взаємодіях при критично низьких енергіях нижчих 1 МеВ. Накопичені протони і антипротони можна загальмувати попередньо до низьких енергій, а потім додатково охолодити. Мінімальна енергія визначатиметься ефектами кулонівського розштовхування в антипротонному пучкові при необхідній інтенсивності. Застосування електронного охолодження надасть можливість накопичення повністю чистих пучків антигідрогену [38]. Відкривається можливість перед експериментаторами по накопиченню пучків іонів, які відзначатимуться високою монохроматичністю. Застосування електронного охолодження дуже важливе для експериментів з важкодоступними іонами, головним чином важкими, що дає можливість роботи з найрідкіснішими ізотопами в абсолютно чистих умовах [39]. Але, головним чином, найочікуванішим і найхвилюючим з найближчих прикладних застосувань електронного охолодження на сьогодні залишається його активне впровадження для здійснення експериментів на зустрічних протон-антипротонних пучках на критично високих енергіях.

Дослідження електронного охолодження іонів залишається актуальним, так, зокрема, цілий ряд доповідей на Міжнародній конференції COOL2017, присвяченій методам охолодження, стосуються вивчення та впровадження електронного охолодження на найсучасніших установках: накопичувальне кільце CSRm в Інституті сучасної фізики, Ланьжоу, Китай [40]; COSY [41] та HESR [42] проект FAIR, Інститут ядерних досліджень, Дармштадт, Німеччина; LEReC RHIC @ BNL, Нью-Йорк, США [43] .

1.3. Теорія електронного охолодження

1.3.1. Класичні теорії

Електронне охолодження - це добре загально прийнятий інструмент поліпшення якості фазового простору іонних пучків в накопичувальних кільцях. Під час охолодження іонів легкі частинки утримуються сильними зовнішніми магнітними полями. Теоретичний опис такої системи іон-електрон-магнітне поле — це виклик для теоретиків [44].

Взаємодію налітаючої зарядженої частинки з речовиною, наприклад, гальмування (охолодження) важких іонів в електронній плазмі, традиційно визначають, використовуючи дві доповнюючі одна одну теоретичні моделі: теорію парних кулонівських зіткнень та діелектричну модель. Діелектрична модель враховує енергетичні втрати через збурення середовища, яке виникає в ньому, як реакція на рух налітаючої зарядженої частинки. При цьому теорія працює, за умов, що виникаюче збурення є невеликим. Тому необхідно виключити із розгляду в рамках діелектричного підходу малі прицільні параметри взаємодії між налітаючим іоном та електронами середовища. Досліджується вклад в енергетичні втрати від колективних ефектів. Зіткнення при малих прицільних параметрах можна врахувати в парній теорії. Проводячи обрізання велих значень прицільних параметрів в теорії парних зіткнень, ми таким чином враховуємо процес екранування заряду електронами плазми. Загальні втрати енергії частинкою при русі в електронній плазмі стають рівні суммі знайдених результатів в обох методах, після процедури зшивки [45].

Історично першою для описання електронного охолодження було використано теорію парних зіткнень. Так, зокрема, в [18] вперше була проведена оцінка швидкості зміни енергії налітаючого протона завдяки кулонівським парним зіткненням з електронами для експериментів з електронного охолодження.

В роботі [46] представлені результати експеримента з електронного охолодження антипротонів на установці НАП-М. Підтверджено, що протонний та антипротонні пучки найкраще охолоджуються, втрачають свою теплову енергію, коли швидкості іонного пучка співпадають зі швидкостями електронного, як за величиною, так і за напрямком, що передбачено в рамках теорії парних зіткнень. В роботах [19, 47] дана загальна характеристика кінетики електронного охолодження без магнітного поля для випадку великих та малих швидкостей налітаючої частинки.

В [19] зроблено припущення, що повздовжне магнітне поле може суттєво змінити швидкість протікання процесу гальмування іонів в електронному

газ, за рахунок того, що поперечний рух електронів обмежується зовнішнім магнітним полем, вони не можуть вільно рухатися в поперечному напрямку до магнітного поля. Так, зокрема, в роботі [48] показано, що в плазмі, яка перебуває в сильному магнітному полі шлях вільного пробігу швидкого протона, $V_i \gg v_e$, що рухається вздовж силових ліній магнітного поля суттєво збільшується. Це пояснюється тим, що в таких сильних полях квантованість поперечної енергії електронів зменшує кулонівські енергетичні втрати налітаючого протона. Кулонівський шлях вільного пробігу в сильному магнітному полі зростає в $(M_p/m_e)^{1/2}$ разів, в порівнянні з шляхом вільного пробігу в плазмі без магнітного поля. Кулонівські енергетичні втрати стають малими.

У випадку швидкостей важкої зарядженої частинки порядку теплових швидкостей електронів визначальну роль у втратах енергії має відігравати повздовжня температура електронів, розкид за швидкостями, яка в експериментах з електронного охолодження при потенціальному прискоренні електронного пучка суттєво менша за поперечну [19].

Експериментально на установці VAPP-NAP в Інституті ядерних досліджень, Новосибірськ, підтверджено існування теоретично передбаченого "сплюсненого" розподілу в розкиді електронів за швидкостями при електростатичному прискоренні [49, 50]. Показано, що при «сплющеному» розподілі за швидкостями втрати енергії протоном перевищують аналогічні для ізотропного розподілу при тих же відносних швидкостях протонів і електронів. Пояснено існування "швидкого" електронного охолодження за рахунок одночасного впливу "сплющеного" розподілу та повздовжнього однорідного магнітного поля. В кінцевих формулах для адіабатичної, прицільні параметри перевищують ларморівський радіус $\rho \gg r_L$, компоненти сили тертя в магнітному полі не входить поперечна температура електронного газу. В адіабатичний кулонівський логарифм L_A входить ларморівський радіус як мінімальний прицільний параметр.

В роботі [47] для втрат енергії з магнітним полем виділяють три

області прицільних параметрів: а) малі прицільні параметри, де впливом магнітного поля можна знехтувати; б) середні прицільні параметри, де враховується обертання електронів по ларморівському радіусові; в) великі прицільні параметри, де налітаюча частинка взаємодіє вже не з електроном, як таким, а тільки з ларморівським диском, що рухається вздовж магнітного поля. Аналітичні вирази вдається отримати для випадку, коли швидкість налітаючої частинки значно перевищує швидкість теплового руху електронів, $V_i \gg v_e$.

В оглядах [22, 23, 32] з метою систематизації наявних фізичних уявлень про процес гальмування важких заряджених частинок в електронному газі дається теоретичний опис методу електронного охолодження. Зокрема, силу тертя, що діє на іон, визначено в рамках парної моделі у випадках як без зовнішнього магнітного поля, так і з ним. Без магнітного поля для максвелівського однотемпературного ізотропного електронного газу, сила тертя у випадку великих швидкостей налітаючого іона, $V_i \gg v_e$ пропорційна $F \propto 1/V_i^3$. У протилежному випадку при малих швидкостях налітаючої зарядженої частинки $V_i \ll v_e - F \propto 1/v_e^3$. При врахуванні в теоретичних розрахунках, "сплюсненості" розподілу, використовується в розрахунках двоштемпературний анізотропний максвелівський розподіл за швидкостями, для аналітичного визначення сили тертя виділяється вже три області: а) область великих швидкостей $v_{e\perp} < V_i$; б) область помірних швидкостей $v_{e\parallel} < V_i < v_{e\perp}$; в) область малих швидкостей $V_i < v_{e\parallel}$. Зовнішнє магнітне поле в теоретичному описі процесу гальмування призводить до ще більш детального розбиття області дослідження. Це розбиття пов'язане із відношенням прицільного параметру взаємодії між електроном та іоном до ларморівського радіуса: 1) На малих прицільних параметрах, іон взаємодіє з електроном настільки швидко, що вплив магнітного поля ніяк не проявляється на рухові останнього. Такий процес можливий, якщо час взаємодії, прольоту, значно менший за період ларморівського обертання електронів. Такі зіткнення називаються швидкими. 2) Проміжні прицільні параметри. В зіткненнях з такими прицільними параметрами частинка рухається з електроном протягом

кількох періодів ларморівського обертання електрона. 3) Великі прицільні параметри. Електрони мають вигляд для налітаючої зарядженої частинки як ларморівський круг і зіткнення носять такий же характер, що й для замагнічених електронів. З даного визначення слідує, що вибір значення прицільного параметра перш за все залежить від швидкості іона. Загальна залежність енергетичних втрат від швидкості отримується екстраполяцією аналітичних результатів.

В попередніх роботах процес охолодження антипротонів розглядався як серія послідовних незалежних парних зіткнень, антипротон-електрон. Такий підхід призводить до виникнення логарифмічних розбіжностей при врахуванні великих прицільних параметрів. Шляхом вирішення даної проблеми є врахування поляризаційних ефектів в рамках діелектричного підходу [51]. Діелектрична модель дає можливість врахувати енергетичні втрати від поляризаційних ефектів через збурення середовища, яке виникає в ньому, як реакція на рух налітаючої зарядженої частинки [45, 52, 53].

В роботах [54, 55] показано, що в плазмі середньої концентрації вклад від колективних процесів, розсіювання на малі кути, в загальні енергетичні втрати того ж порядку, що й від парних зіткнень, а для розрідженої плазми, що характерно для електронного охолодження, взагалі на порядок вищі.

Фізика плазми як добре розвинена галузь науки дає нам багатий набір знарядь [45, 54–59] для теоретичного опису процесу обміну енергією між компонентами плазми у зовнішньому магнітному полі. Плазма розглядається як діелектричне середовище, поширення хвиль в якому описується за допомогою тензора діелектричної проникності $\varepsilon_{ij}(\vec{k}, \omega)$, який можна отримати з кінетичного рівняння Больцмана-Власова для самоузгодженого електромагнітного поля [60]

В роботі [61] досліджено вплив анізотропної функції розподілу частинок пучка, що проходить крізь магнітоактивну плазму, на збудження електромагнітних коливань. Знайдено інкременти наростання таких хвиль: 1) повздовжніх електронних коливань плазми; 2) електромагнітних хвиль у

випадку квазіповздовжнього розповсюдження (ленгмюрівська частота значно більша гірчастоти електронів і частоти коливань); 3) іонно-циклотронних і магнітогідродинамічних хвиль.

Для сильних магнітних полів та без магнітного поля аналіз енергетичних втрат в рамках плазмової моделі було зроблено в роботах [36, 45, 62, 63], а також у випадку слабких полів Нерсісян [53]. В роботі [36] в рамках класичної плазмової моделі визначені втрати енергії зарядженої частинки в холодній плазмі, що утримується зовнішнім однорідним магнітним полем. Досліджена залежність втрат енергії від кута вльоту налітаючої частинки відносно зовнішнього магнітного поля та його напруженості.

В роботі [64] отримано загальний вираз для сили тертя в трьох випадках: (i) частинка рухається через невзаємодіючу плазму в сильному однорідному магнітному полі; (ii) швидка частинка рухається через замагнічену безкінечну плазму вздовж магнітного поля; (iii) частинка рухається через замагнічену плазму, частинки плазми взаємодіють між собою. Розрахунки проводяться для довільних значень швидкості частинки в першому випадку, а для швидких частинок у другому та третьому випадках.

В роботі [65] використовуючи діелектричну теорію для слабозв'язаної плазми, досліджується гальмівна сила, що діє на іон в анізотропній двотемпературній електронній плазмі в присутності магнітного поля. Загальний вираз для сили тертя проаналізовано для слабких та сильних магнітних полів (тобто для електронної циклотронної частоти менше, ніж і більша, ніж частота плазми), а також для низьких та високих швидкостей іонів.

Плазмова теорія працює за умов, якщо виникаюче збурення є невеликим. Тому необхідно виключити із розгляду в рамках діелектричного підходу малі прицільні параметри взаємодії між налітаючим іоном та електронами середовища. Теорія парних зіткнень, з іншого боку, добре працює саме для близьких зіткнень, вимагаючи процедури "обрізання" великих прицільних параметрів. Для отримання повного результату необхідно об'єднати результати, отримані в рамках обох підходів, тобто провести процедуру

"зшивки" [45].

Проте для плазми у зовнішньому магнітному полі процедура зшивки стає нетривіальною задачею, через наявність великої кількості проміжних прицільних параметрів [22, 51].

В [66] розглянуто втрати енергії важкого іону, що рухається в магнітоактивній електронній плазмі в рамках наближеннях лінійної реакції, діелектрична модель, (LR) та парних зіткнень (BC) з метою пошуку зв'язку між цими двома моделями. Ці два взаємодоповнюючі підходи дають близькі результати, якщо магнітне поле відсутнє, але розбіжності збільшуються зі зростанням магнітного поля при швидкостях іонів, менших або близьких до теплових швидкостей електронів. Показано, що це - особливість кулонівської взаємодії, яка вимагає використання процедури "обрізання" для уникнення сингулярності. Методи обрізання в LR та BC відрізняються, оскільки порядок інтегрування в просторі швидкостей та в звичайних (Фур'є) просторах різняться в обох підходах.

В [67] порівнюються результати отримані в рамках теорії парних зіткнень та діелектричної проникності для випадку без магнітного поля. Для випадку сильних та помірних магнітних полів проводиться чисельне інтегрування виразів для гальмівної здатності. При цьому проводиться обрізання малих та великих прицільних параметрів, щоб уникнути логарифмічного розходження.

В [68, 69] особлива увага приділяється вивченню процесів електронного охолодження високзарядних іонів, як, наприклад, ядер голого урану, в проекті NITRAP. В режимі, де є високі значення заряду, характерні для важких іонів (параметрами взаємодії $1/N_D < 1$ та $Z_p/N_D \gg 1$ (N_D кількість електронів у дебаївській сфері, заряд Z_p іона)) рівняння Власова-Пуассона не може бути лінеаризоване. Розв'язок система Власова-Пуассона знаходиться чисельно, використовуючи можливості нового покоління масово паралельних суперкомп'ютерів.

В [70, 71] проведено дослідження процесу сповільнення кластерних об'єднань іонів, подвійної системи іон-іон в електронній плазмі.



В експериментальній роботі [26] на установці МОСОЛ (модель соленоїда) виміряно силу тертя. Виявляється, що позитивно та негативно заряджені іони втрачають енергію в замагніченому електронному газі по різному. Різниця в процесі електронного охолодження різнойменно заряджених іонів пояснюється у відмінності мінімального прицільного параметра, що входить до кулонівського логарифма. В [67] експериментально показано, що для позитивно та негативно заряджених частинок, окрім різної сили тертя, характерна різна кінцева температура охолодження. В [72, 73] передбачається, що рух поперечного електрона пригнічується сильним магнітним полем. Передається енергія більша для розсіювання на негативному іоні і показує гострий пік параметра впливу, який відповідає відстані найближчого підходу. Встановлено, що в цьому випадку рівняння руху мають солітоноподібне рішення.

Аналітичні вирази, отримані в попередніх роботах дають можливість оцінити енергетичні втрати іона тільки в ряді наближень. Для визначення повної залежності гальмівної здатності електронного газу від напруженості магнітного поля та швидкості налітаючої зарядженої частинки теоретичні досягнення доповнюються чисельними розрахунками [44, 67, 67–69, 74].

Для чисельного розрахунку втрат зарядженою частинкою в замагніченій плазмі при електронному охолодженні використовують чисельне моделювання PIC (Particle-in-cell) методом Монте-Карло (класичні траєкторії) [53, 70, 74] або програмний пакет BetaCool [75]. В основі останнього закладені формули Будкера [19], Пархомчука або Дербеньова-Скринського [75].

Робота [76] представляє собою останній огляд теоретичних та експериментальних аспектів електронного охолодження.

1.3.2. Квантово-польовий підхід

Використання квантово-польового підходу дає нам можливість уникнути процедури, зшивки, оскільки відсутнє розходження при малих та великих прицільних параметрах у визначенні гальмівної здатності електронного газу, характерних для класичних теорії парних зіткнень та плазмової моделі.

Кванто-польовий підхід включає в себе як частинні випадки і результати парної теорії, і діелектричної моделі.

Використання квантово-польового підходу (методу функції збурення) для описання електронів плазми не є оригінальним. Він був розроблений у фізиці твердого тіла [77–79].

Застосовуючи квантовий підхід автори робіт [77, 78]. показали, що класичне діелектричне наближення можна отримати як частинний випадок квантової теорії в першому порядку за e^2 .

В роботі [80] запропоновано використовувати метод функції Гріна та діаграмну техніку для визначення енергетичних втрат зарядженою частинкою, що рухається через плазму. Гальмівна здатність виражається через двохчастинкову функцію Гріна, для визначення якої застосовується діаграмна техніка. Показано, що запропонований кванто-польовий підхід включає в себе як частинні випадки і результати парної теорії, і діелектричної. Отримані чисельні множники кулонівського логарифму в крайніх випадках.

В [81] розглянуто використання методу функцій Гріна в багаточастинковій задачі. І як приклад наведені результати, отримані в роботі [80]. Метод двохчастинкової функції Гріна та діаграмної техніки було узагальнено для релятивістського випадку.

В [45, 82] методами квантової теорії поля досліджується взаємодія нерелятивістської зарядженої частинки з електронною плазмою в присутності магнітного поля. В першому наближенні за e^2 знайдена діелектрична проникність, частоти і коефіцієнти затухання повздовжніх коливань плазми в магнітному полі. Отримана загальна формула для втрат енергії частинкою під час проходження через плазму. Досліджено випадок, коли швидкості налітаючої частинки значно перевищують швидкості теплового руху електронів, $V_i \gg v_e$. Отримані вирази втрат енергії у випадку слабого та сильного зовнішніх магнітних полів.

В [83] з використанням функцій Гріна досліджено тензор діелектричної проникності електронного газу у зовнішньому магнітному полі.

Використовуючи дисперсійне рівняння отримано спектр осциляцій, які виникають в електронній плазмі, та вивчено умови їх затухання.

В [84] розраховано діелектричну функцію $\varepsilon(k, \omega)$ електронної плазми в тепловій рівновазі для всіх ступенів виродження плазми. Попередні результати для виродженої та невиродженої плазми, засновані на квантово-механічних, класичних або квазікласичних підходах, містяться в цьому аналізі. Вирази для дійсної та уявної частин $\varepsilon(k, \omega)$ задані для випадків низьких і високих частот, довгих і коротких довжин хвиль.

В роботі [85] досліджено гальмівна здатність слабо зв'язаної замагніченої плазми. Проаналізовано вплив ларморівського обертання важкої зарядженої частки. Для визначення діелектричної проникності використано підхід випадкових фаз, тому необов'язкова процедура обрізання не потрібна. Для випадків високої та низької швидкостей налітаючого іона знайдено прості аналітичні вирази для зупинки. Вивчено залежність гальмівної здатності від кута падіння. Наведено порівняння з численними рішеннями. Встановлено, що взагалі магнітне поле зменшує гальмівну здатність плазми при високих швидкостях налітаючої зарядженої частинки, і навпаки, наявність магнітного поля призводить до збільшення сили тертя при низьких швидкостях.

Розділ монографії [53], присвячений дослідженню електронного охолодження в рамках квантової фізики.

Квантово-польовий підхід дає можливість дослідити з перших принципів вплив на енергетичні втрати важких заряджених частинок як зовнішнього магнітного поля, так і анізотропного розподілу електронів за швидкостями. В роботі [86] методами квантової теорії поля досліджується електрична сприйнятливості анізотропної електронної плазми в однорідному магнітному полі. Знайдено електричну сприйнятливості замагніченої електронної плазми з урахуванням анізотропії температури в лінійному наближенні та квантові поправки до неї. Проводиться перевірка одержаних формул з відповідними виразами фізики плазми та оцінка квантових поправок.

В [87] авторами вивчено питання поширення важких заряджених частинок

в електронному газі за допомогою комбінації нерелятивістської квантової механіки та методу функцій Гріна. Втрати енергії зарядженої частки знайдено у випадку великого перенесеного імпульсу з урахуванням інтерференційного члену.

Аналітичні результати, отримані в загальноприйнятих наближеннях в рамках квантово-польових методів, потребують доповнення чисельними методами.

1.4. Висновки до розділу 1

1. Проведений огляд літератури показує, що незважаючи на велику кількість досліджень, задача побудови та розвитку теорії, яка б, виходячи з перших принципів, описувала взаємодію важкої зарядженої частинки з електронним газом з анізотропним розподілом за швидкостями у зовнішньому магнітному полі є актуальною.

2. Квантово-польовий підхід дає можливість дослідити з перших принципів вплив на енергетичні втрати важких заряджених частинок як зовнішнього магнітного поля, так і анізотропного розподілу електронів за швидкостями .

3. Використання квантово-польового підходу дає нам можливість уникнути процедури, зшивки, оскільки відсутнє розходження при малих та великих прицільних параметрах у визначенні гальмівної здатності електронного газу, характерних для класичних теорії парних зіткнень та плазмової моделі. Кванто-польовий підхід включає в себе як частинні випадки і результати парної теорії, і діелектричної моделі.

4. Аналітичні результати, отримані в загальноприйнятих наближеннях в рамках квантово-польових методів, потребують доповнення чисельними методами.

РОЗДІЛ 2

КВАНТОВА ТЕОРІЯ ПОЛЯ В ЗАДАЧІ ЕЛЕКТРОННОГО ОХОЛОДЖЕННЯ

2.1. Вступ

Квантово-польовий підхід дає можливість з перших принципів дослідити явище електронного охолодження. В рамках даного методу вдається отримати загальний вираз для втрат енергії важкою зарядженою частинкою в замагніченому електронному газі з врахуванням розподілу за швидкостями електронів, уникаючи при цьому залучення емпіричного визначення значення кулонівського логарифму. Вираз для енергетичних втрат при великих та малих приціальних параметрах сходиться.

В підрозділі 2.2. розвиваються результати роботи [36], виконані в рамках діелектричної (плазмової) моделі. Для знаходження загальних втрат в роботі [36] було використано традиційний для подібних задач метод зшивки далеких та близьких зіткнень. Недолік такого підходу полягає в тому, що він потребує введення проміжного феноменологічного параметру обрізання, і при цьому виникає необхідність залучення результатів, отриманих в рамках іншої теорії, теорії парних зіткнень [45, 53, 62].

Щоб уникнути цього недоліку запропоновано інший підхід. Верифікація отриманих результатів проводиться, використовуючи принцип відповідності. Коли знайдені результати у більш складному випадку при граничному переході не суперечать більш простій теорії.

В підрозділі 2.2. в рамках діелектричної моделі розглянуто випадок без магнітного поля; аналітично знайдені вирази втрат важкою зарядженою частинкою при русі в повздовжньому та в поперечному до магнітного поля напрямках, відповідно; показано, що, використовуючи метод відповідності, при «виключенні» зовнішнього магнітного поля, переходимо до більш простого випадку без магнітного поля; проведено аналіз та чисельні розрахунки вкладу від колективних ефектів в рамках діелектричної моделі при русі пробної

частинки під довільним кутом ($0 < \alpha < \pi/2$) для різних значень зовнішнього однорідного магнітного поля. Отримані результати порівняні з результатами отриманими в рамках більш загального методу квантової теорії поля в роботі [45].

В підрозділі 2.3. проведена оцінка квантових поправок в силу тертя, що діє на протон в замагніченому електронному газі, зокрема, пов'язаних з температурою виродження електронного газу та переходами електронів між рівнями Ландау. Представлені основні кроки при використанні квантово-польового методу у визначенні енергетичних втрат важкої зарядженої частинки в електронному газі у зовнішньому магнітному полі.

2.2. Втрати енергії в холодній магнітоактивній плазмі

2.2.1. Постановка задачі.

Нехай в однорідній безкінечній плазмі ($\lambda_D \ll l$) під кутом α до зовнішнього однорідного магнітного поля, напруженістю \vec{H} , рухається заряджена частинка, наприклад, протон, з масою M_i і зарядом Q_i , з постійною відносною швидкістю $\vec{V}_i = \vec{v}_i - \vec{v}_{eBeam}$, де \vec{v}_i — швидкість протона в лінійному прискорювачі, \vec{v}_{eBeam} — швидкість пучка як цілого в прискорювачі.

Прийmemo ряд припущень: 1) лінійні розміри електронної плазми l значно перевищують дебаївський радіус λ_D , так що можна знехтувати граничними умовами; 2) початкова електронна густина n_e однорідна; 3) збурення плазми, викликане рухом в ній іона, незначне, тобто, збурена електронна густина відносно мала в порівнянні з початковою густиною $\delta n_e \ll n_{0e}$; 4) зовнішнє магнітне поле однорідне і постійне як за значенням, так і за напрямком; 5) іон — важка частинка, тому в масштабах іон-електронної взаємодії його швидкість можна вважати постійною; 6) квазінейтральність електронної плазми забезпечується зовнішніми полями;

Виходячи з цих припущень матимемо наступну вихідну систему рівнянь:

1. Рівняння Власова-Больцмана для електронної плазми, в якій відсутні зіткнення.

Представимо функцію розподілу електронів у плазмі як суму $f_e = f_{0e} + \delta f_e$, до складу якої входить f_{0e} та δf_e — рівноважна та збурена складова функції розподілу, відповідно. При цьому пам'ятаємо, що в силу припущення (3) збурення густини плазми, викликане рухом в ній важкої зарядженої частинки, відносно мале в порівнянні з початковою густиною.

$$\frac{df_e}{dt} = \frac{\partial f_e}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f_e}{\partial \vec{r}} - \frac{e}{m_e} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] \right) \frac{\partial f_e}{\partial \vec{v}} = 0, \quad (2.1)$$

де $\left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] \right)$ — сила Лоренца, яка діє на електрони плазми.

З точністю до членів другого порядку

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \delta f_e = \frac{e}{m_e} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] \right) \frac{\partial f_{e0}}{\partial \vec{v}}. \quad (2.2)$$

В лінійному наближенні для амплітуди збурення функції розподілу маємо

$$\delta \bar{f}_e = \frac{ie \left(\vec{E} \vec{v} \right) \partial f_{e0} / \partial E}{\left(\omega - \vec{k} \vec{v} \right)}, \quad (2.3)$$

де $\partial f_{e0} / \partial E$ — похідна по енергії.

При цьому у збуреній плазмі виникають струми

$$\vec{j}_e = e \int \vec{v} f_e d^3 \vec{v} = ie^2 \int \frac{\left(\vec{E} \vec{v} \right) \partial f_{e0} / \partial E}{\left(\omega - \vec{k} \vec{v} \right)} \vec{v} d^3 \vec{v}. \quad (2.4)$$

Для рівняння (2.4) отримуємо співвідношення

$$i\frac{4\pi}{\omega}\vec{j} = -\frac{4\pi e^2}{\omega} \int \frac{\vec{v}(\vec{E}\vec{v})}{(\omega - \vec{k}\vec{v})} \frac{\partial f_{e0}}{\partial E} d^3\vec{v}. \quad (2.5)$$

Представимо вираз (2.5) в тензорному вигляді через $j_m = \sigma_{mn}E_n$, де σ_{mn} — тензор провідності плазми. Тоді справедливо

$$\sigma_{mn} = ie^2 \int \frac{v_m v_n}{(\omega - \vec{k}\vec{v})} \frac{\partial f_{e0}}{\partial E} d^3\vec{v}. \quad (2.6)$$

Використаємо одне з рівнянь Максвела й запишемо його в лінійному наближенні

$$\text{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} - \frac{i\omega}{c}\vec{E} = -\frac{i\omega}{c} \left[\vec{E} + i\frac{4\pi}{\omega}\vec{j} \right]. \quad (2.7)$$

Підставляючи (2.6) в (2.7) маємо

$$\varepsilon_{mn}E_n = \left(\delta_{mn} + \frac{4\pi i}{\omega}\sigma_{mn} \right) E_n, \quad (2.8)$$

де $\varepsilon_{mn} = \left(\delta_{mn} + \frac{4\pi i}{\omega}\sigma_{mn} \right)$ — тензор діелектричної проникності плазми, який виражає реакцію середовища на збурення; δ_{mn} — символ кронікера.

2. Рівняння Пуассона, виходячи з припущення (6)) має вигляд

$$\Delta\varphi = -4\pi Q_i \delta(\vec{r} - \vec{V}_i t) - 4\pi e n_e(\vec{r}, t), \quad (2.9)$$

де $Q_i\delta(\vec{r} - \vec{V}_i t)$ — заряд частинки, що влітає; \vec{V}_i — швидкість цієї частинки; $en_e(\vec{r}, t)$ — електронний заряд; $\delta(x)$ — дельта функція.

3. Рівняння руху для електронної плазми

$$\frac{d\vec{v}_e}{dt} = -\frac{e}{m_e} \vec{E} - \frac{e}{m_e} [\vec{v}_e \vec{H}], \quad (2.10)$$

де $\vec{E} = \vec{E}_0 - \vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.

В потенціальному наближенні маємо

$$\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} \vec{\nabla}\varphi - \frac{e}{m} [\vec{v}_e \vec{H}]. \quad (2.11)$$

4. Рівняння неперервності електронної плазми

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \text{div}(n_e \vec{v}_e) = 0, \quad (2.12)$$

де $n_e = n_{0e} + \delta n_e$;

n_{0e} — рівноважна складова електронної густини;

δn_e — густина збурених електронів.

$$\frac{\partial(n_{0e} + \delta n_e)}{\partial t} + \text{div}((n_{0e} + \delta n_e)\vec{v}_e) = 0. \quad (2.13)$$

З огляду на порівняно малу кількість збурених електронів (припущення 3)), можемо записати:

$$\frac{\partial \delta n_e}{\partial t} + n_{0e} \operatorname{div}(\vec{v}_e) = 0. \quad (2.14)$$

Скористаємось Фур'є перетворенням для потенціалу, створюваного іоном

$$\varphi_i(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3k. \quad (2.15)$$

Знайдемо похідну

$$\Delta_{\vec{r}} \varphi_i(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} (-k^2) \varphi_i(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3k. \quad (2.16)$$

Як результат похідна від Фур'є образу потенціалу рівна

$$\Delta \varphi_i(\vec{k}) = -k^2 \varphi_i(\vec{k}). \quad (2.17)$$

Використаємо обернені перетворення Фур'є

$$\Delta \varphi_i(\vec{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta \varphi_i(\vec{r}) e^{i\vec{k}\vec{r}} dV \quad (2.18)$$

і підставимо в (2.18) вираз для іонного потенціала (2.9)

$$\Delta\varphi_i(\vec{k}) = - \int_{-\infty}^{\infty} 4\pi Q_i \delta(\vec{r} - \vec{V}_i t) e^{i\vec{k}\vec{r}} dV = -4\pi\rho e^{-it\vec{k}\vec{V}_i}. \quad (2.19)$$

Звідси з (2.17) і (2.19) отримаємо

$$\varphi_i(\vec{k}) = -4\pi Q_i \frac{e^{-it\vec{k}\vec{V}_i}}{k^2}. \quad (2.20)$$

Використовуючи співвідношення $\varphi_e = \varphi_{total} - \varphi_i$ і $\varphi_{total} = \varphi_i/\varepsilon$ отримаємо для наведеного йоном електронного потенціалу

$$\varphi_e(\vec{k}, \omega) = -4\pi Q_i \frac{e^{-it\vec{k}\vec{V}_i}}{k^2} \left(\frac{1}{\varepsilon(\vec{k}, \omega)} - 1 \right), \quad (2.21)$$

де ε — діелектрична проникність середовища, φ_{total} — повний потенціал, створований системою заряджених частинок.

Основний вклад даватимуть області, де $\varepsilon(\vec{k}, \omega) \rightarrow 0$, тому можемо (2.21) записати як

$$\varphi_e(\vec{k}, \omega) = -4\pi Q_i \frac{e^{-it\vec{k}\vec{V}_i}}{k^2 \varepsilon(\vec{k}, \omega)}. \quad (2.22)$$

Зміна енергії частинки, яка рухається в плазмі, можна визначити як роботу сил, що діють з боку хвильового електричного поля, яке збуджується, власне, самою частинкою:

$$\frac{dE}{dt} = Q_i \vec{V}_i \vec{E}(\vec{r} = \vec{V}_i t). \quad (2.23)$$

Знайдемо \vec{E} - електричне поле створюване електронами плазми, наведеними пробною частинкою

$$\vec{E} = -\nabla \varphi_e(\vec{r}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_e(\vec{k}) i\vec{k} e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3k = -\frac{i4\pi Q_i}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{k} e^{i(\vec{k}\vec{r} - t\vec{k}\vec{V}_i)}}{\varepsilon(\vec{k}, \omega) k^2} d^3k. \quad (2.24)$$

Отже, підставляючи (2.24) в (2.23) втрати зарядженою частинкою в електронній плазмі в тензорному вигляді запишуться як

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{iQ_i^2}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{k}\vec{V}_i}{\varepsilon_{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta} d^3k. \quad (2.25)$$

Для зручності подальших розрахунків виконаємо процедуру безрозмірювання величин, що входять до підінтегрального виразу. Безрозмірний хвильовий вектор \vec{q} дорівнює:

$$\vec{k} = \vec{q} \frac{\omega_P}{V_i}, \quad (2.26)$$

де ω_P - плазмова частота електронної компоненти, V_i - швидкість іона.

Введемо параметр магнітного поля

$$h = \frac{\omega_H}{\omega_P}. \quad (2.27)$$

Використовуючи (2.26), для компонент підінтегрального виразу отримуємо

$$d^3k = d^3q \left(\frac{\omega_P}{V_i} \right)^3, \quad (2.28)$$

$$\omega = \vec{k}\vec{V}_i = \omega_P \vec{q}\vec{n}_i \Rightarrow \vec{q}\vec{n}_i = \frac{\omega}{\omega_P}, \quad (2.29)$$

де $\vec{n}_i = \vec{V}_i/V_i$, $w = \omega/\omega_p$.

Тензор діелектричної проникності $\varepsilon_{\alpha\beta}$ у випадку холодної магнітоактивної електронної плазми має вигляд [45]

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

де, враховуючи (2.26), (2.27), для компонент тензора діелектричної проникності (2.30) матимемо

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\perp} &= 1 - \frac{1}{(\vec{q}\vec{n}_i)^2 - h^2}, \\ \varepsilon_{\parallel} &= 1 - \frac{1}{(\vec{q}\vec{n}_i)^2}, \\ g &= -\frac{h}{(\vec{q}\vec{n}_i)((\vec{q}\vec{n}_i) - h^2)}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Введемо позначення

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{Q_i^2 \omega_P}{V_i} \frac{1}{2\pi^2} \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w}{\varepsilon_{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta} d^3q = \frac{q^2 \omega_P}{V_i} S, \quad (2.32)$$

де нормовані на величину $q^2 \omega_P / V_i$ поляризаційні втрати енергії S в холодній плазмі записуються як

$$S = -\frac{i}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w}{\varepsilon_{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta} d^3q. \quad (2.33)$$

2.2.2. Енергетичні втрати частинки в плазмі без зовнішнього магнітного поля

Розглянемо випадок, коли відсутнє зовнішнє магнітне поле. Тоді $h = 0$. Компоненти тензора діелектричної проникності запишуться як

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon = 1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2} = \frac{(\vec{q}\vec{n}_i)^2 - 1}{(\vec{q}\vec{n}_i)^2}. \quad (2.34)$$

Виберемо систему координат так, щоб $\vec{e}_z \parallel \vec{n}_i$. Звідси (2.34):

$$\varepsilon = \frac{q_z^2 - 1}{q_z^2}, \quad (2.35)$$

а знаменник підінтегрального виразу (2.33)

$$\varepsilon_{\alpha\beta} q_{\alpha} q_{\beta} = \varepsilon (q_x^2 + q_y^2 + q_z^2). \quad (2.36)$$

Підставляючи (2.35), (2.36) в (2.33) маємо

$$S = -\frac{i}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_z^3}{(q_x^2 + q_y^2 + q_z^2)(q_z^2 - 1)} d^3 q. \quad (2.37)$$

В сферичних координатах (2.37) має вигляд

$$S = -\frac{i}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{dq}{q} \int_0^{\pi} q d\theta \sin \theta \frac{q^3 \cos^3 \theta}{(q^2 \cos^2 \theta - 1)}. \quad (2.38)$$

Використаємо заміну

$$t = q \cos \theta; \quad dt = -q \sin \theta d\theta. \quad (2.39)$$

Із заміною координат (2.39) і після інтегрування по $d\varphi$ (2.38) отримаємо

$$S = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dq}{q} \int_{-q}^q dt \frac{t^3}{(t^2 - 1)}. \quad (2.40)$$

Інтеграл по dt знайдемо в рамках теорії лишків. Обхід лишків виконаємо за правилом Ландау [79]

$$S = \int_0^{\infty} \frac{dq}{q}. \quad (2.41)$$

Використовуюючи співвідношення $\omega = \vec{k}\vec{V}_i = kV_i \cos \theta$, рівність (2.35) можна записати як $\varepsilon = 1 - (k\lambda_a \cos \theta)^{-2}$, а це показує, що поле навколо йона при швидкостях значно вищих за тепловий рух електронів $\vec{V}_i \gg \vec{v}_e$ стає невідчутним на відстанях порядку адіабатичного параметра обрізання $\lambda_a = V_i/\omega_p$ [62].

Отже,

$$S = \int_1^{\infty} \frac{dq}{q} = \ln q_{max} = \ln \frac{k_{max} V_i}{\omega_p}, \quad (2.42)$$

Феноменологічний параметр $\int_1^{\infty} dq/q$ — кулонівський логарифм, де під логарифмом записане співвідношення максимального та мінімального прицільних параметрів. Для того, щоб визначити повні енергетичні втрати зазвичай проводиться процедура "зшивки" з результатами, отриманими в рамках парної теорії взаємодії між зарядженими частинками. Така "зшивка", дає нам можливість уникнути необхідності визначення k_{max} . k_{max} приймається як деякий проміжний параметр, що є спільним для обох підходів теоретичного опису. Оскільки, відомо, що в результаті отримаємо для співвідношення прицільних параметрів [45]

$$q_{max} = \frac{m_e M_i V_i^3}{(M_i + m_e) Q_i^2 \omega_p}. \quad (2.43)$$

В подальшому для уникнення необхідності залучення методу зшивки для визначення q_{max} , і відповідно залучення теорії парних зіткнень,

використовуватимемо метод відповідності. Тобто, при «вимиканні» магнітного поля результати відповідатимуть випадку без магнітного поля, а q_{max} визначатиметься рівнянням (2.43).

2.2.3. Випадок повздовжнього до магнітного поля руху $\vec{V}_i \parallel \vec{H}(\alpha = 0)$

Якщо в систему взаємодії важкої зарядженої частинки з електронною плазмою ввести зовнішнє однорідне повздовжнє магнітне поле \vec{H} , щоб, наприклад, утримувати електрони в секції охолодження, і при цьому це магнітне поле достатньо сильне так, що $\omega_H > \omega_P$, то, як показує експеримент [19], в процесі гальмування електронним газом відбуваються суттєві зміни.

Виберемо систему координат так, щоб $\vec{q}\vec{n}_i = q_z$, тобто частинка рухається паралельно до силових ліній зовнішнього однорідного магнітного поля. Тоді компоненти тензора діелектричної проникності мають вигляд

$$\varepsilon_{\parallel} = \frac{q_z^2 - 1}{q_z^2}; \quad \varepsilon_{\perp} = \frac{q_z^2 - 1 - h^2}{q_z^2 - h^2}. \quad (2.44)$$

В сферичних координатах нормовані енергетичні втрати (2.33) запишемо

$$S = -\frac{i}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dq q^2 \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \frac{q \cos \theta}{g(q, \theta)}, \quad (2.45)$$

де

$$g(w, \theta) = \frac{q^2 \left(q^2 \cos^2 \theta - 1 - h^2 + \frac{h^2}{q^2} \right)}{q^2 \cos^2 \theta - h^2}. \quad (2.46)$$

Проведемо інтегрування (2.45) по φ

$$S = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dq}{q} \int_0^{\pi} d\theta \frac{\sin \theta q \cos \theta (q^2 \cos^2 \theta - h^2)}{q^2 \left(q^2 \cos^2 \theta - 1 - h^2 + \frac{h^2}{q^2} \right)}. \quad (2.47)$$

Використаємо заміну змінних (2.39)

$$S = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dq}{q} \int_{-q}^q \frac{t (t^2 - h^2)}{t^2 - t_0^2}, \quad (2.48)$$

де $t_0^2 = 1 + h^2 - h^2/q^2$.

Змінна t залежить від змінної q . Аналіз області інтегрування показує, що на (2.48) накладаються умови після інтегруванні по t — нормовані втрати дійсні в областях, де

$$0 \leq t_0^2 \leq q^2. \quad (2.49)$$

На рис.2.1 показана залежність t_0^2 від q^2 . Вклад дають області, де крива знаходиться під променем $t^2 = q^2$.

Використовуючи залежність $t_0^2(q_0^2) = 0$, маємо

$$q_0^2 = h^2/(1 + h^2). \quad (2.50)$$

Точки перетину кривої t_0^2 з променем $t^2 = q^2$ знаходяться з умови $t_0^2 = q^2$.

У випадку $h > 1$:

$$q_1^2 = 1; \quad q_2^2 = h^2. \quad (2.51)$$

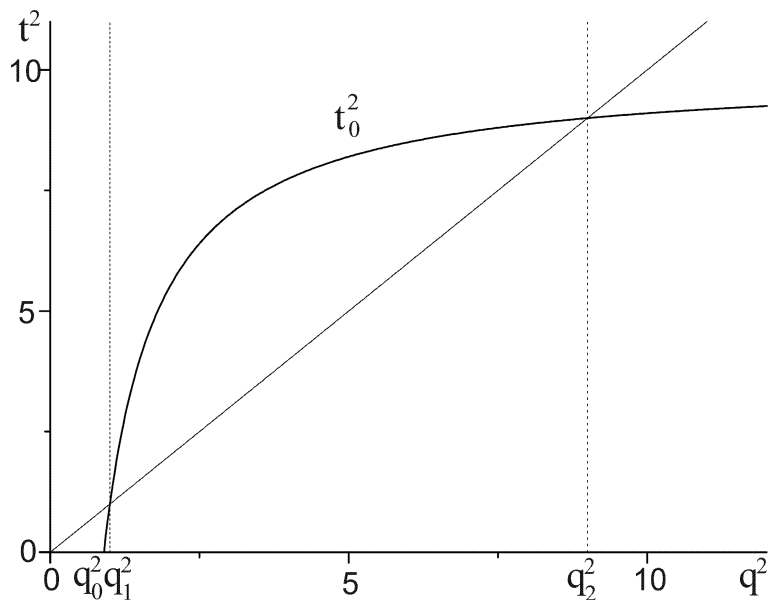


Рис. 2.1. Залежність t_0^2 від q^2 . $t_0^2(q_0^2) = 0$. При $q^2 = q_1^2$ або $q^2 = q_2^2$ крива t_0^2 перетинає промінь $t^2 = q^2$.

З умови (2.49) слідує, що інтервал інтегрування слід розбити на дві частини. Застосувавши теорію лишків, запишемо нормані втрати як суму

$$S = \int_{q_2}^{\infty} \frac{dq}{q} \left(1 - \frac{h^2}{q^2}\right) - \int_{q_0}^{q_1} \frac{dq}{q} \left(1 - \frac{h^2}{q^2}\right). \quad (2.52)$$

Остаточно для нормованих втрат енергії запишемо, провівши інтегрування по q ,

$$S = \ln q_{max} - \ln \sqrt{1 + h^2}. \quad (2.53)$$

Порівнявши вирази (2.42) і (2.53) для втрат енергії можна записати

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{Q_i^2 \omega_P^2}{V_i} (\ln q_{max} - f(h)), \quad (2.54)$$

де

$$f(h) = \ln \sqrt{1 + h^2}. \quad (2.55)$$

Отриманий результат у випадку повздовжнього руху зарядженої частинки до магнітного поля в електронній плазмі відповідає результатам, отриманим в рамках квантової електродинаміки [45].

Якщо покласти $h = 0$ (відсутнє зовнішнє магнітне поле), то $f(h) = 0$, а (2.54) згідно принципу відповідності переходить в (2.42). Феноменологічний параметр q_{max} визначається рівністю (2.43).

2.2.4. Випадок поперечного до магнітного поля руху $\vec{V}_i \perp \vec{H}$ ($\alpha = \pi/2$)

Розглянемо випадок руху важкої зарядженої частинки зі швидкістю \vec{V}_i в поперечному напрямку до зовнішнього повздовжнього магнітного поля \vec{H} в електронному замагніченому газі, властивості якого описуються тензором діелектричної проникності $\varepsilon_{\alpha\beta}$, явний вигляд якого для випадку холодної замагніченої електронної плазми представлений виразами (2.30), (2.31).

Виберемо систему координат так, що вісь z співпадала з напрямком зовнішнього магнітного поля \vec{H} , а вісь x з напрямком руху зарядженої частинки $\vec{v}\vec{n}_i = q_x$.

$$\varepsilon_{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta = \varepsilon_\perp (q_x^2 + q_y^2) + \varepsilon_\parallel q_z^2. \quad (2.56)$$

Для подальших розрахунків зручніше здійснити поворот системи так, щоб $q_y \uparrow \vec{H}$. В результаті:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta = q^2 - q_\perp^2 \left(\frac{1}{q_z^2 - h^2} \right) - q_\parallel^2 \frac{1}{q_z^2}, \quad (2.57)$$

де $q_\perp^2 = q_z^2 + q_x^2$, $q_\parallel^2 = q_y^2$.

Перейдемо до сферичної системи координат.

$$S = -\frac{i}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dq \int_0^\pi q^2 \sin \theta d\theta \frac{q \cos \theta}{\varepsilon}, \quad (2.58)$$

де

$$\varepsilon = \frac{q^2 q_z^4 - q^2 q_z^2 h^2 - q_z^2 q_x^2 - q_z^4 - q_y^2 q_z^2 + q_y^2 h^2}{q_z^2 (q_z^2 - h^2)}. \quad (2.59)$$

Використаємо заміну змінних (2.39). Звідси, рівняння (2.58) в нових координатах

$$S = -\frac{i}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \frac{dq}{q} \int_{-q}^q \frac{t^3 (t^2 - h^2) dt}{g(t, q, \varphi)}, \quad (2.60)$$

де

$$g(t, q, \varphi) = t^4 - t^2 (h^2 + 1) + h^2 (1 - t^2/q^2) \sin^2 \varphi. \quad (2.61)$$

Нулі $g(t, q, \varphi)$ мають вигляд:

$$t_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left(1 + h^2 + \frac{h^2 \sin^2 \varphi}{q^2} \right) \mp \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 + h^2 + \frac{h^2 \sin^2 \varphi}{q^2} \right)^2 - 4h^2 \sin^2 \varphi}. \quad (2.62)$$

Змінна t залежить від змінної q . Аналіз області інтегрування показує, що можливі два випадки, якщо інтегрувати по t (див. рис.2.2).

1. Проміжок $(0, q_3)$

На проміжку від 0 до q_3 інтеграл дорівнює лишку в t_1 ($t_1 < q < t_2$). В q_3^2 крива t_2^2 перетинає промінь $t^2 = q^2$.

$$\int_0^q dt f(t) = \int \pi i \operatorname{res}[f(t), t_1]; \quad (2.63)$$

2. Проміжок (q_3, ∞)

В межах від q_3 до ∞ вклад дають обидва нулі функції $g(t, q, \varphi)$ ($t_1 < t_2 < q$)

$$\int_0^w dt f(t) = \pi i \sum_{n=1}^2 \operatorname{res}[f(t), t_n]. \quad (2.64)$$

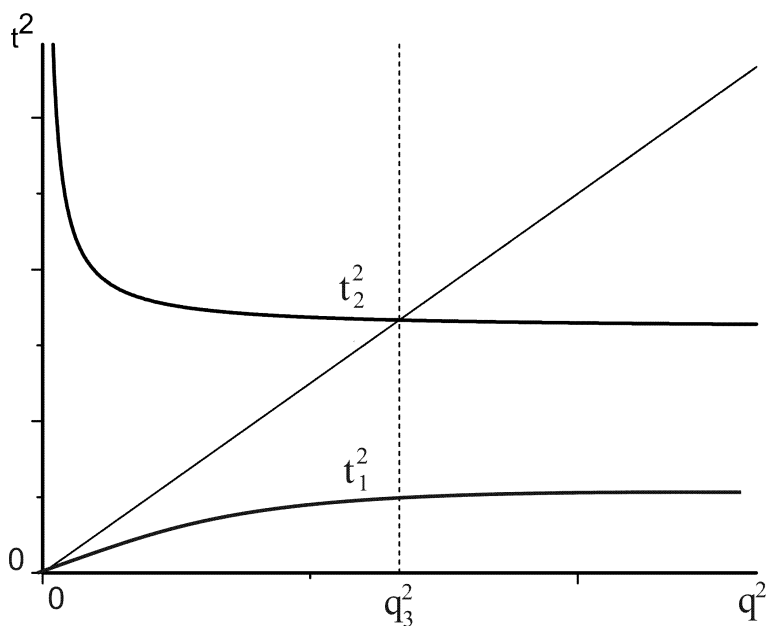


Рис. 2.2. Залежність t_1^2, t_2^2 від q^2 . При $q^2 = q_3^2$ крива t_2^2 перетинає промінь $t^2 = q^2$.

Отже, фактично можна записати

$$S = -\frac{i}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\int_0^{q_3} + \int_{q_3}^{\infty} \right) \frac{dq}{q} \int_{-q}^q \frac{t^3 (t^2 - h^2) dt}{(t^2 - t_1^2)(t^2 - t_2^2)}, \quad (2.65)$$

де з умови $t_2^2 = q^2$ отримуємо, що $q_3^2 = 1 + h^2$.

1. ($t_1 < q < t_2$).

Інтеграл рівний:

$$\int_0^q dt f(t) = \pi i \cdot \text{res}[f(t), t_1] = \pi i \frac{t_1^2 (t_1^2 - h^2)}{t_1^2 - t_2^2}; \quad (2.66)$$

2. ($t_1 < t_2 < q$)

Підставляючи значення лишків t_1, t_2 в (2.64), отримуємо

$$\int_0^q dt f(t) = \pi i \sum_{n=1}^2 \text{res}[f(t), t_n] = \pi i (t_2^2 + t_1^2 - h^2). \quad (2.67)$$

Розглянемо два крайні випадки: слабке та сильне магнітні поля. Коли $h \gg 1$, то кінечний інтеграл матиме вигляд:

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{Q_i^2 \omega_p}{V_i} \left(\ln |q_{max}| - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln \frac{h}{2} \right). \quad (2.68)$$

Якщо $h \ll 1$, то отримуємо

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{Q_i^2 \omega_p}{V_i} \left(\ln |q_{max}| - \frac{h^2}{4} - \frac{h^4}{8} \ln \frac{h}{2} \right). \quad (2.69)$$

З (2.69) видно, якщо покласти $h = 0$, то отримуємо згідно принципу відповідності результати без магнітного поля (2.42), де q_{max} визначається рівністю (2.43).

2.2.5. Загальний випадок

Розглянемо тепер випадок руху частинки під довільним кутом α до магнітного поля ($\vec{V}_i \vec{H} = |V_i| |H| \cos \alpha$). Як і раніше виберемо систему координат, так що $\vec{H} \uparrow \uparrow \vec{z}$.

Втрати іона в холодній замагніченій електронній плазмі даються виразом (2.25).

Виконаємо поворот системи координат навколо осі $0y$, так щоб $\vec{V}_i \uparrow \uparrow z$, тоді $\vec{q} \vec{n}_{\vec{V}_i} = q_z$.

$$\begin{aligned}
q_x &= q'_x \cos \alpha + q'_z \sin \alpha, \\
q_z &= -q'_x \sin \alpha + q'_z \cos \alpha, \\
q_y &= q'_y.
\end{aligned}
\tag{2.70}$$

Запишемо втрати енергії, використавши (2.30), в нових координатах, при цьому опустимо штрихи для зручності запису.

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{Q_i^2 \omega_P^2}{V_i} \frac{1}{2\pi^2} \text{Im} \iiint \frac{q_z d^3q}{g_0(q_x, q_y, q_z)} = \frac{Q_i^2 \omega_P^2}{V_i} S,
\tag{2.71}$$

де знаменник підінтегрального виразу $g_0(q_x, q_y, q_z)$ з урахуванням (2.70) має вигляд

$$g_0(q_x, q_y, q_z) = \varepsilon_{\perp} (q_y^2 - q_{y0}^2),
\tag{2.72}$$

де

$$q_{y0}^2 = -\frac{\varepsilon_{\perp} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{\parallel} \sin^2 \alpha}{\varepsilon_{\perp}} (q_x - q_{x1})(q_x - q_{x2}),
\tag{2.73}$$

$$\begin{aligned}
q_{x1,2} &= -q_z \frac{\cos \alpha \sin \alpha (\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel})}{\varepsilon_{\perp} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{\parallel} \sin^2 \alpha} \mp \\
&\mp q_z \sqrt{\left(\frac{\cos \alpha \sin \alpha (\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel})}{\varepsilon_{\perp} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{\parallel} \sin^2 \alpha} \right)^2 - \frac{\varepsilon_{\parallel} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{\perp} \sin^2 \alpha}{\varepsilon_{\perp} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{\parallel} \sin^2 \alpha}}. \quad (2.74)
\end{aligned}$$

Компоненти тензора діелектричної проникності у випадку $\vec{V}_i \uparrow\uparrow z$ записуються

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{q_z^2 - \omega_3^2}{q_z^2 - h^2}, \quad \varepsilon_{\parallel} = \frac{q_z^2 - 1}{q_z^2}. \quad (2.75)$$

З урахуванням (2.75) після деяких спрощень (2.73) і (2.74) читаються

$$\begin{aligned}
q_{x1,2} &= \frac{q_z}{(q_z^2 - \omega_1^2)(q_z^2 - \omega_2^2)} \times \\
&\times \left(h^2 \sin \alpha \cos \alpha \mp q_z \sqrt{(\omega_3^2 - q_z^2)(q_z^2 - h^2)(q_z^2 - 1)} \right). \quad (2.76)
\end{aligned}$$

$$q_{y0}^2 = \frac{(q_z^2 - \omega_1^2)(q_z^2 - \omega_2^2)}{q_z^2(\omega_3^2 - q_z^2)} (q_x - q_{x1})(q_x - q_{x2}). \quad (2.77)$$

У вирази (2.76), (2.77) входять характерні величини задачі:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}(\omega_3^2 \mp \sqrt{\omega_3^4 - 4h^2 \sin^2 \alpha}), \quad (2.78)$$

де $\omega_3^2 = 1 + h^2$.

Безрозмірні частоти ω_1 і ω_2 — це плазмові резонанси. Плазмові резонанси відіграють суттєву роль при розповсюдженні електромагнітних хвиль у плазмі. Поблизу них різко зростають затухання хвиль та рівень шумів. Показник заломлення електромагнітних хвиль поблизу цих резонансів великий ($n \gg 1$), а фазова швидкість значно менша швидкості світла, тобто хвилі стають повільними, і, відповідно, взаємодія заряджених частинок відбувається найбільш ефективно біля плазмових резонансів [45, 56]. Частота ω_1 відповідає нижньогібридним частотам, спектр яких лежить в межах $0 \leq q \leq \min[1, h]$, в той час як ω_2 — верхньогібридним, зі спектром $\max[1, h] \leq q \leq \omega_3$.

Величини $q_{x1}, q_{x2}, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ визначають область інтегрування.

У випадку, коли $h > 1$, отримані характеристичні величини співвідносяться як

$$\omega_3 \geq \omega_2 \geq h > 1 \geq \omega_1.$$

Проведемо інтегрування (2.71) по змінній q_y . Згідно теорії лишків матимемо

$$S = \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} dq_z \frac{q_z^2(q_z^2 - h^2)}{\sqrt{(\omega_3^2 - q_z^2)(q_z^2 - \omega_2^2)(q_z^2 - \omega_1^2)}} dq_x \sqrt{(q_x - q_{x1})(q_x - q_{x2})}. \quad (2.79)$$

Інтеграл відмінний від нуля, коли

$$q_{y0}^2(q_x, q_z) \geq 0. \quad (2.80)$$

Зріз області інтегрування при $q_{y0}(q_x, q_z) = 0$ зображено на рис.2.3, 2.4

В точках $q_z = h, 1, \omega_3$ криві $q_{x1}(q_z), q_{x2}(q_z)$ переходять одна в одну.

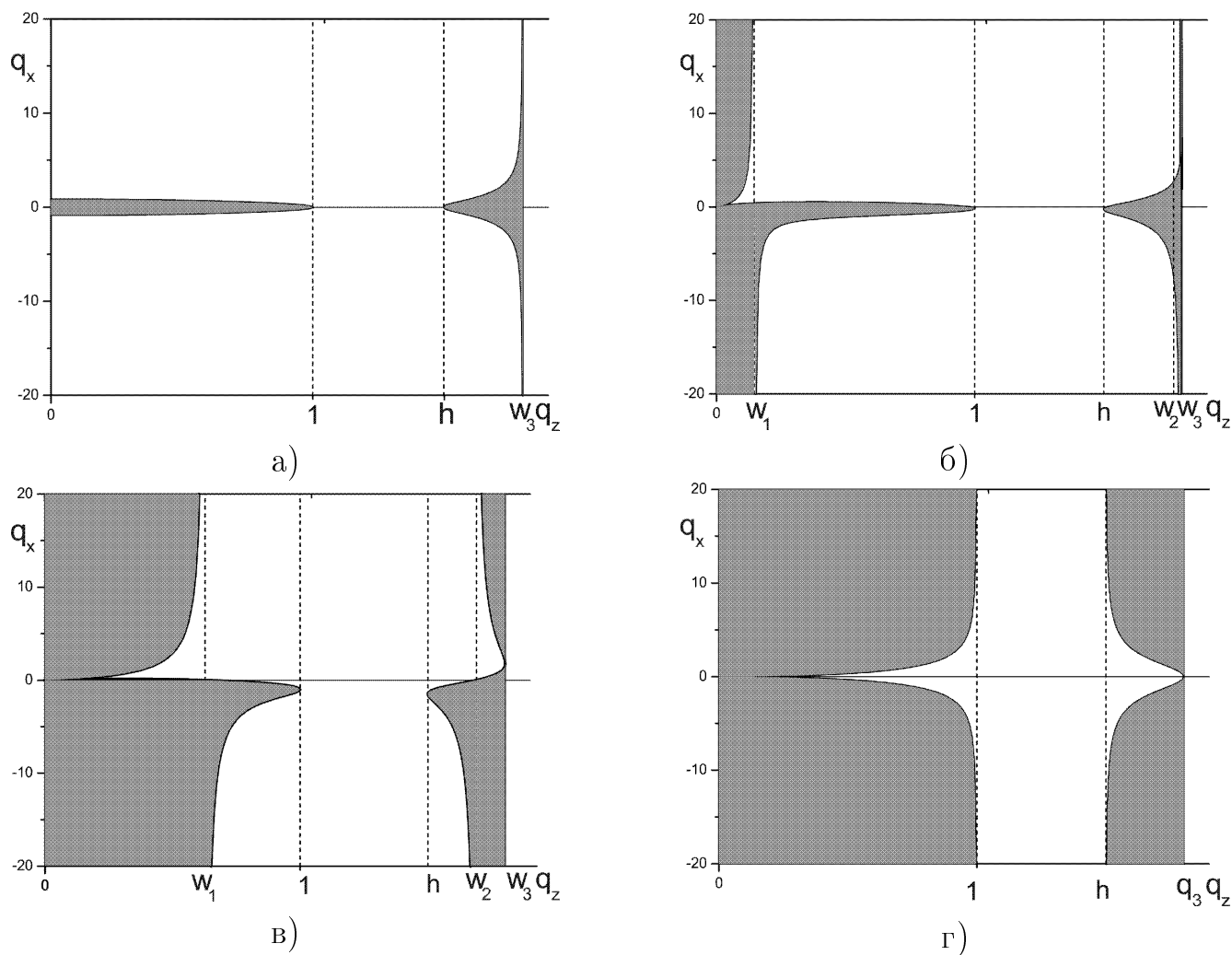


Рис. 2.3. Зріз області інтегрування ($q_{y0}(q_x, q_z) = 0$), $h = \omega_H/\omega_P = 1.5$: а) $\alpha = 0$, б) $\alpha = \pi/18$, в) $\alpha = \pi/4$, г) $\alpha = \pi/2$. Области з дійсними коренями виділені кольором.

Область інтегрування σ визначається нерівністю (2.80). На площині (q_x, q_z) вона обмежена кривими $q_{x1}(q_z), q_{x2}(q_z)$. Відзначимо, що функції $q_{x1}(q_z), q_{x2}(q_z)$ дійсні в діапазонах частот

$$0 \leq \omega_1 \leq \min(1, h), \max(1, h) \leq \omega_2 \leq \omega_3.$$

У випадку повздовжнього руху $\alpha = 0$ вклад в енергетичні втрати дають області $\omega_1 \leq q \leq 1$ і $h \leq q \leq \omega_2$. При поперечному русі $\alpha = \pi/2$ — області $0 \leq q \leq \omega_1$ і $\omega_2 \leq q \leq \omega_3$. В загальному випадку енергетичні втрати є сумою

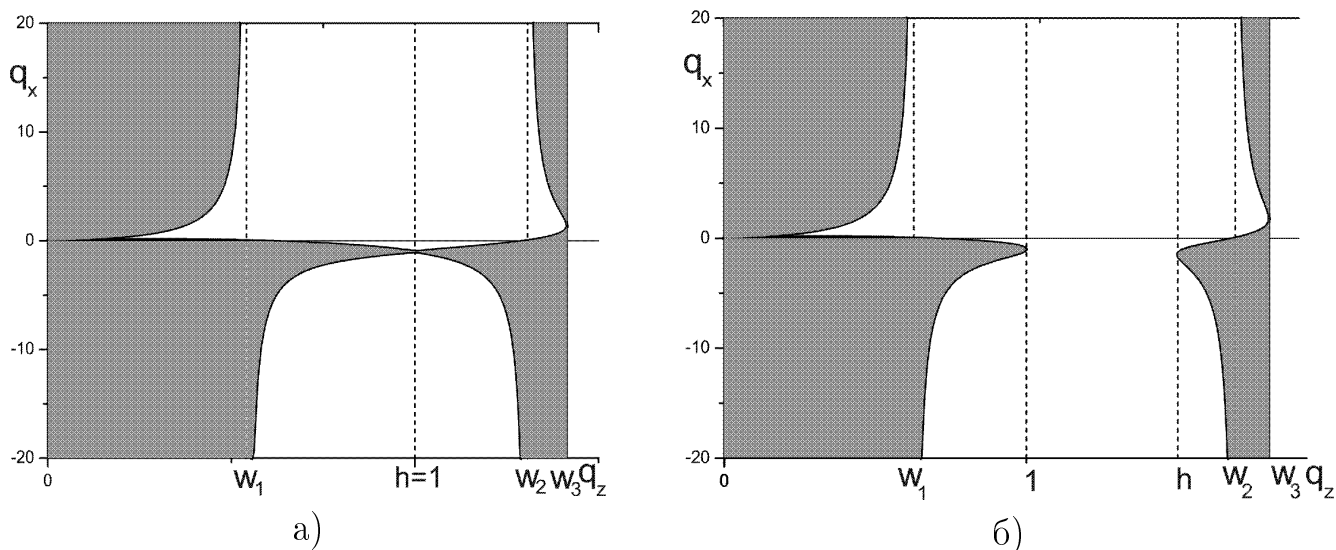


Рис. 2.4. Зріз області інтегрування ($q_{y0}(q_x, q_z) = 0$), $\alpha = 60$: а) $h = 1$, б) $h = 1.7$. Области з дійсними коренями виділені кольором.

вкладів від всіх чотирьох областей:

$$S = \frac{1}{\pi} \sum_{\beta=1}^4 I_{\beta}, \quad (2.81)$$

де

$$I_1 = \int_0^{\omega_1} dq_z \frac{q_z^2(h^2 - q_z^2)}{\sqrt{P(q_z)}} \left(\int_{-\infty}^{q_{x1}} \frac{dq_x}{\sqrt{R(q_x, q_z)}} + \int_{q_{x2}}^{\infty} \frac{dq_x}{\sqrt{R(q_x, q_z)}} \right); \quad (2.82)$$

$$I_2 = \int_{\omega_1}^{\min(1,h)} dq_z \frac{q_z^2(h^2 - q_z^2)}{\sqrt{-P(q_z)}} \int_{q_{x2}}^{q_{x1}} \frac{dq_x}{\sqrt{-R(q_x, q_z)}}; \quad (2.83)$$

$$I_3 = \int_{\max(1,h)}^{\omega_2} dq_z \frac{q_z^2(q_z^2 - h^2)}{\sqrt{-P(q_z)}} \int_{q_{x2}}^{q_{x1}} \frac{dq_x}{\sqrt{-R(q_x, q_z)}}; \quad (2.84)$$

$$I_4 = \int_{\omega_2}^{\omega_3} dq_z \frac{q_z^2(q_z^2 - h^2)}{\sqrt{P(q_z)}} \left(\int_{-\infty}^{q_{x1}} \frac{dq_x}{\sqrt{R(q_x, q_z)}} + \int_{q_{x2}}^{\infty} \frac{dq_x}{\sqrt{R(q_x, q_z)}} \right), \quad (2.85)$$

де $P(q_z) = (\omega_3^2 - q_z^2)(q_z^2 - \omega_2^2)(q_z^2 - \omega_1^2)$, а $R(q_x, q_z) = (q_x - q_{x1})(q_x - q_{x2})$.

Використовуюючи принцип відповідності можемо переписати (2.81) у вигляді

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{Q_i^2 \omega_P^2}{V_i} (\ln q_{max} - f(h, \alpha)). \quad (2.86)$$

Результати чисельного розрахунку енергетичних втрат важкої зарядженої частинки в магнітоактивній електронній плазмі в рамках діелектричної моделі за формулами (2.81)-(2.85) представлені на рис.2.5-2.6.

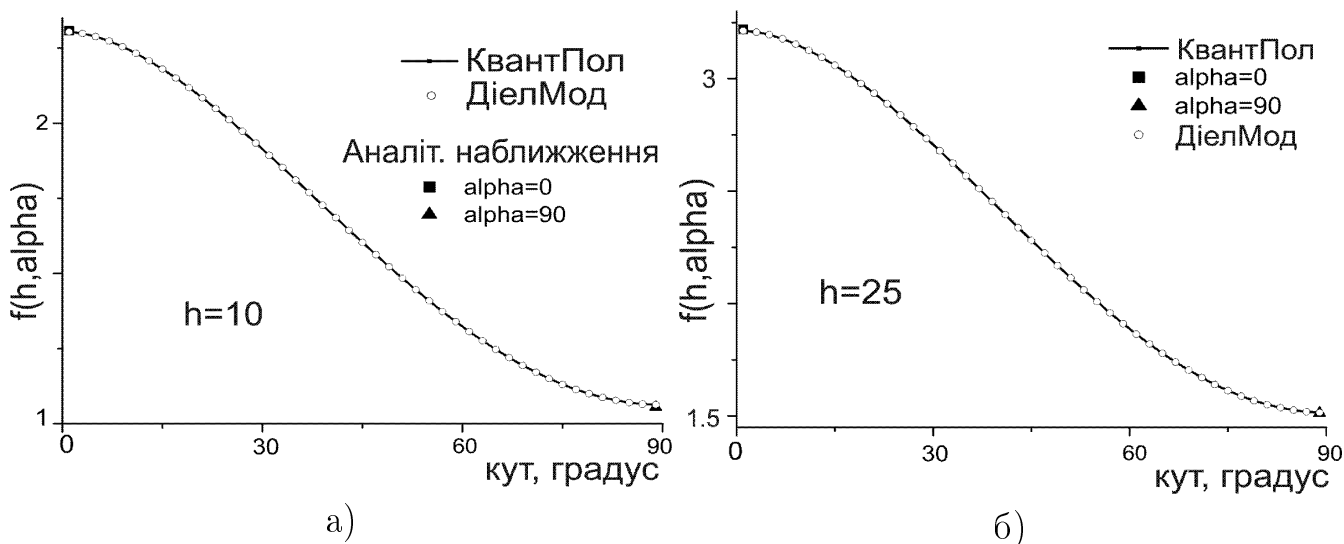


Рис. 2.5. Кутова залежність функції $f(\alpha, h)$ для випадку а) $\omega_H/\omega_P = 10$, б) $\omega_H/\omega_P = 25$. Суцільна лінія — квантова теорія [45]; квадрат — $\alpha = 0$, вираз (2.55); трикутник — $\alpha = \pi/2$, вираз (2.68) для $h \gg 1$; кружки — діелектрична модель.

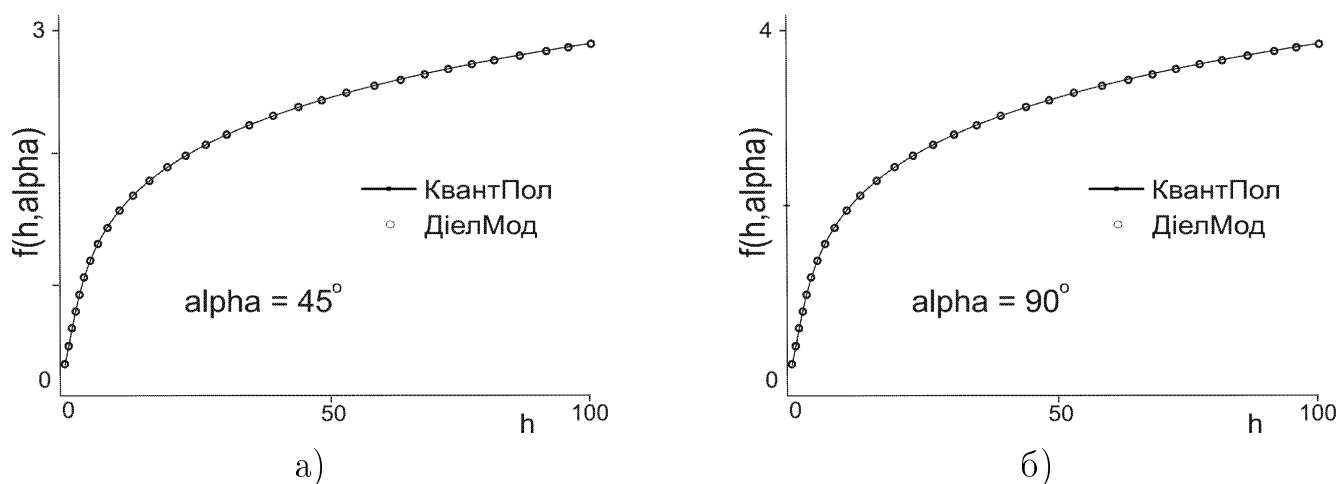


Рис. 2.6. Залежність функції $f(\alpha, h)$ від параметру магнітного поля $h = \omega_H/\omega_P$ для випадку а) $\alpha = \pi/4$, б) $\alpha = \pi/2$. Суцільна лінія — квантова теорія поля [45], кружки — діелектрична модель.

На рис. 2.5 а, 2.5 б побудована кутова залежність функції $f(\alpha, h)$ рівняння (2.86), отримана як результат чисельного розрахунку аналітичних виразів, обчислених в рамках діелектричного підходу (вирізані круги) та квантової теорії поля [45] (суцільна лінія). Рис. 2.5 а та 2.5 б відрізняються значеннями напруженості магнітного поля. Так на рис. 2.5 а параметр магнітного поля $h = 10$, на рис. 2.5 б — $h = 25$. На рисунках також представлені додаткові точки, що є точним аналітично знайденим значенням функції $f(\alpha, h)$ для випадків повздовжнього (зафарбований трикутник, $\alpha = 0$) та поперечного (зафарбований трикутник, $\alpha = \pi/2$) до магнітного поля руху частинки, яка гальмується в електронній плазмі. Результати добре узгоджуються між собою.

На рис. 2.6 а, 2.6 б побудована залежність функції $f(\alpha, h)$ від напруженості магнітного поля рівняння (2.86), отримана як результат чисельного розрахунку аналітичних виразів, обчислених в рамках діелектричного підходу (вирізані круги) та квантової теорії поля [45] (суцільна лінія). Рис. 2.6 а та 2.6 б відрізняються значеннями кута вльоту важкої зарядженої частинки. Так на рис. 2.6 а кут риний $\alpha = \pi/6$, на рис. 2.6 б — $\alpha = \pi/2$. Результати діелектричного та квантово польового підходів добре узгоджуються між собою.

У випадку холодної плазми сильне магнітне поле, $h \gg 1$, подавляє передачу енергії (див. рис. 2.6).

2.3. Квантово-польові методи в задачі електронного охолодження

2.3.1. Квантові ефекти в електронному охолодженні.

Квантово-польовий підхід дає можливість з перших принципів дослідити явище електронного охолодження. В рамках даного методу вдається отримати загальний вираз для втрат енергії важкою зарядженою частинкою в замагніченому електронному газі з врахуванням розподілу за швидкостями електронів, уникаючи при цьому залучення емпіричного визначення значення кулонівського логарифму L_C . Вираз для енергетичних втрат при великих та малих прицільних параметрах сходиться.

Оцінимо можливі квантові явища, що можуть спостерігатися в експериментах з охолодженням іонів.

В електронному газі в магнітному полі можливі два види квантових ефектів: 1) квантові ефекти, що спостерігаються в електронному газі з температурою нижчою температури виродження [88] — електронний газ веде себе як квантовий об'єкт; 2) квантові ефекти, пов'язані з рівнями Ландау в енергетичному спектрі електронів, спричинених наявністю зовнішнього магнітного поля [89].

Так, для характерних параметрів в експериментах з використанням електронного охолодження [33]: електронна густина $N \approx 3 \cdot 10^7 \text{ см}^{-3}$, плазмова $\omega_P \approx 2.9 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$ та циклотронна $\omega_H \approx 3.5 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$ частоти, повздовжня $T_{e\parallel} = 10^{-5} \text{ еВ}$ та поперечна $T_{e\perp} = 10^{-3} \text{ еВ}$, температура виродження ϵ

$$T_0 = \frac{\hbar^2}{2m_e} (3\pi^2 N)^{2/3} \sim 10^{-10} \text{ еВ}, \quad \frac{T_0}{T_{e\parallel}} = 10^{-5}. \quad (2.87)$$

Температура електронного газу в експериментах значно вища, за температуру виродження. Наразі досягти подібних значень температур в електронному охолодженні являється технічно неможливим.

У другому випадку важливим є відношення енергії між рівнями Ландау та

поперечною кінетичною енергією електронів.

$$\frac{\hbar\omega_B}{T_\perp} = \frac{eB\hbar}{2mcT_\perp} \sim 10^{-3}. \quad (2.88)$$

Для сучасних установок, таких як HESR (FAIR Collaboration), квантові поправки не суттєві. Хоча, відзначимо, що реалізувати в лабораторних умовах квантове електронне охолодження цілком можливо. Для цього необхідно підняти напруженість магнітного поля на порядок та знизити значення поперечної температури на порядок.

2.3.2. Енергетичні втрати в рамках квантово-польового підходу.

Розглянемо базові кроки квантово-польового методу для задач типу електронного охолодження [82].

Гамільтоніан взаємодії системи заряджених частинок середовища та налітаючої частинки можна записати як

$$H = H_0 + H'(t), \quad (2.89)$$

де H_0 — гамільтоніан незбуреної системи частинок середовища, другий доданок $H'(t)$ — Гамільтоніан взаємодії, що описує збурення, яке вносить налітаюча заряджена частинка:

$$H'(t) = \int d\vec{r} J_0(\vec{r}, t) a_0(\vec{r}, t), \quad (2.90)$$

$$a_0(\vec{r}, t) = (4\pi)^{-1} \int d\vec{r}' |\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} j_0(\vec{r}', t).$$

a_0 — оператор скалярного потенціалу, j_0 і J_0 — оператори густини заряду системи частинок та налітаючої частинки, відповідно. Елементи матриці розсіювання

$$S = T \left\{ -i \int_{-\infty}^{\infty} H'(t) dt \right\} \quad (2.91)$$

зв'язують різні стани вихідної системи із зовнішньою частинкою. Ці стани характеризуються набором квантових чисел α, n , де $\alpha \equiv (\nu, p_z, q)$ — квантові числа налітаючої частинки в магнітному полі \vec{H} і n — набір квантових чисел, що описують стан частинок середовища із певною енергією E_n і певним числом самих частинок N_n .

Вважатимемо швидкість налітаючої частинки V достатньо великою ($e^2 V^{-1} \hbar^{-1} \ll 1$), щоб її взаємодію з частинками середовища можна було розглядати в рамках теорії збурень. В лінійному наближенні за змінною $H'(t)$ ймовірність переходу із початкового стану з набором квантових чисел α, n в кінцевий стан з квантовими числами α', n' має вигляд

$$W_{if} = 2\pi \delta(E_i - E_f) |H'|^2 \quad (2.92)$$

або

$$\begin{aligned} W_{if} = 2\pi \delta(E_i - E_f) \int d\vec{r} d\vec{r}' &< \alpha' | \hat{J}_0(\vec{r}) | \alpha >, \\ &< \alpha | \hat{J}_0(\vec{r}') | \alpha' > < n' | \hat{\varphi}(\vec{r}) | n > < n | \hat{\varphi}(\vec{r}') | n' > \end{aligned} \quad (2.93)$$

де $(E_i - E_f) = E_n - E_{n'} + \varepsilon_\alpha - \varepsilon_{\alpha'}$; $\varepsilon_\alpha \equiv \varepsilon_{\nu, p_z} = \omega_H (\nu + 1) m_e / M_i + p_z^2 / 2M_i$ — енергія налітаючої частинки, M_i — її маса, $\omega_H = e / m_e c$ — циклотронна частота електрона в магнітному полі, \vec{H} ($\hat{\alpha}_0, \hat{J}_0$ — оператори в Шрьодінгерівському представленні).

Просумуємо вираз для ймовірності за кінцевими станами і усереднимо за початковими з матрицею густини $\rho_0 = \exp \{ \beta (\Omega + \mu N - E_n) \}$ і знайдемо повну ймовірність переходу частинки зі стану з енергією ε_{ν, p_z} в стан з енергією ε_{ν', p'_z}

$$W_{\alpha, \alpha'} = \sum_n \exp \{ \beta (\Omega + \mu N - E_n) \} \sum_{n'} W_{if}. \quad (2.94)$$

Перейдемо до компонент Фур'є

$$W_{\alpha, \alpha'} = 2\pi \int d^3 k \Phi(\vec{k}, \varepsilon_\alpha - \varepsilon_{\alpha'}) U(\vec{k}), \quad (2.95)$$

де $\Phi(\vec{k}, \varepsilon_\alpha - \varepsilon_{\alpha'})$ і $U(\vec{k})$ компоненти функції Фур'є,

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \omega) &= \sum_{n, n'} \exp \{ \beta (\Omega + \mu N - E_n) \} \times \\ &\times \langle n' | \hat{\alpha}_0(\vec{r}_1) | n \rangle \langle n | \hat{\alpha}_0(\vec{r}_2) | n' \rangle \delta(E_n - E_{n'+\omega}), \\ U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) &= \sum_{q, q'} \langle \alpha' | \hat{J}_0(\vec{r}_1) | \alpha \rangle \langle \alpha | \hat{J}_0(\vec{r}_2) | \alpha' \rangle. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Втрати енергії в одиницю часу виражаються через ймовірність як

$$-\frac{dE}{dt} = \sum_{\alpha'} (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_{\alpha'}) W_{\alpha, \alpha'}. \quad (2.97)$$



Підставляючи в (2.97) вираз ймовірності процесу, отриманий в [82] , матимемо

$$-\frac{dE_{\nu,p_z}}{dt} = \frac{2e^2 m \omega_H}{(2\pi)^2} \sum_{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega d\omega}{(1 - e^{-\omega/T_e})} \int \frac{d^3 k}{k} \Lambda_{\nu,\nu'} \left(\frac{k_t}{\sqrt{2m_e \omega_H}} \right) \times \quad (2.98)$$

$$\times \text{Im} \frac{\kappa(\vec{k}, \omega)}{1 + \kappa(\vec{k}, \omega)} \delta(\varepsilon_{\nu,p} - \varepsilon_{\nu',p-k_z} - \omega),$$

де діелектрична сприйнятливість $\kappa(\vec{k}, \omega)$ виражається через поляризаційний оператор:

$$\kappa(\vec{k}, i\omega) = -k^{-2} P(\vec{k}, i\omega). \quad (2.99)$$

Для отримання явного вигляду поляризаційного оператора використовують діаграмну техніку. В однопетльовому наближенні (перше борнівське наближення) поляризаційний оператор визначається за фейнманівською діаграмою, показаною на рис. 2.7.

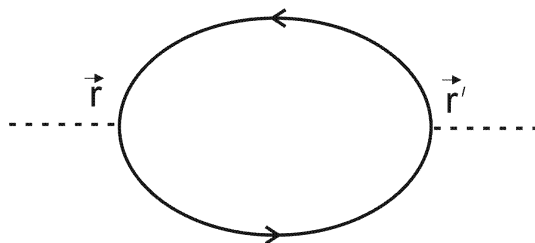


Рис. 2.7. Фейнманівська діаграма для поляризаційного оператора в однопетльовому наближенні.

Кожній суцільній лінії відповідає нульова функція Гріна частинки

$$P(\vec{r} - \vec{r}', i\omega) = \frac{2e^2}{\beta} \sum_{p_4} G(\vec{r}, \vec{r}', p_4) G(\vec{r}', \vec{r}, p_4 - i\omega), \quad (2.100)$$

де $G(\vec{r}, \vec{r}', p_4)$, функція Гріна електрона в магнітному полі, має вигляд

$$G(\vec{r}, \vec{r}', p_4) = \sum_{\alpha} \Psi_{\alpha}(r_1) \frac{1}{\varepsilon_{\alpha} - \mu + ip_4} \Psi_{\alpha}^*(r_2), \quad (2.101)$$

параметр температури T_e міститься в кінцевій формулі для енергетичних втрат (2.98). $\Psi_{\alpha}(r)$ — хвильова функція частинки в магнітному полі [89].

$$\Psi_{\alpha}(\vec{r}) = (2\pi)^{-1} \exp(ip_z z + iqu) \phi_{\nu}(x - q/m_e \omega_H), \quad (2.102)$$

де $\phi_{\nu}(x)$ — хвильова функція лінійного осцилятора з частотою ω_H [89].

Кінцевий вираз для діелектричної сприйнятливості електронного газу в магнітному полі отримано в роботі [82]

$$\kappa(\vec{k}, \omega) = -\frac{2e^2 m_e \omega_H}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2} \sum_{\nu, \nu'} \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \Lambda_{\nu, \nu'} \left(\frac{k_t}{\sqrt{2m_e \omega_H}} \right) \frac{n_{\nu, p_z} - n_{\nu', p_z - k_z}}{\varepsilon_{\nu, p_z} - \varepsilon_{\nu', p_z - k_z} - \omega}. \quad (2.103)$$

Функція $\Lambda_{\nu, \nu'}(a)$ має вигляд

$$\Lambda_{\nu,\nu'}(a) = \int_0^{\infty} ds J_0(2a\sqrt{s}) L_{\nu}(s) L_{\nu'}(s) \exp(-s), \quad (2.104)$$

де $a^2 = \frac{(\hbar k_t)^2}{2m_e \hbar \omega_H}$ це відношення поперечної енергії $\frac{(\hbar k_t)^2}{2m_e}$ до відстані між сусідніми рівнями Ландау $\hbar \omega_H$, $L_{\nu}(x) = \frac{e^{-x}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^x x^n)$ — поліном Лагерра, $J_0(x)$ — функція Бесселя.

2.4. Висновки до розділу 2

В даному розділі обґрунтовується використання квантово-польового методу в задачі електронного охолодження та отримані наступні результати:

1. В рамках класичної діелектричної (плазмової) моделі було вивчено процес взаємодії між важкою зарядженою частинкою та холодним електронним газом в зовнішньому магнітному полі. Показано, що вираз для енергетичних втрат розходиться при великих значеннях хвильового вектора \vec{k} . Тому розрахунок повних енергетичних втрат потребує введення "проміжного" параметра k_{max} та "зшивки" з результатами теорії парної взаємодії для близьких прицільних параметрів. Нами запропоновано, виходячи із принципу відповідності, використовувати явний вигляд кулонівського логарифму, отриманий в рамках квантової теорії поля.

2. Був проведений аналіз виразу для поляризаційних втрат, його залежність від параметру магнітного поля $h = \omega_H/\omega_P$ та кута вльоту пробної частинки α . У випадку холодного електронного газу при підвищенні напруженості магнітного поля енергетичні втрати іона зменшуються. При русі іона вздовж магнітного поля він втрачає свою енергію повільніше, ніж у випадку поперечного руху. Отримано аналітичні вирази для випадків без магнітного поля, з магнітним полем у випадку повздовжнього та поперечного рухів. Аналітичні результати підтверджені чисельними розрахунками,

проведеними для випадку руху зарядженої частинки під довільним кутом до магнітного поля, довільної напруженості. Діелектрична модель сама по собі не дає оцінку повних енергетичних втрат енергії. Вона потребує залучення інших підходів для визначення явного вигляду кулонівського логарифму. Цей недолік відсутній в квантово-польовому підході.

3. Хоча в сучасних експериментах, наприклад, електронне охолодження, квантові ефекти не суттєві, проте використання квантово-польових методів дає можливість з перших принципів дослідити процес взаємодії важкої зарядженої частинки із замагніченими електронами з анізотропним розподілом за швидкостями. В рамках квантово-польового підходу вдається отримати загальний вираз для втрат енергії важкою зарядженою частинкою в замагніченому електронному газі з врахуванням розподілу за швидкостями електронів, уникаючи при цьому залучення емпіричного визначення значення кулонівського логарифму.

РОЗДІЛ 3

ВПЛИВ ТЕМПЕРАТУРИ НА ГАЛЬМІВНУ ЗДАТНІСТЬ ЕЛЕКТРОННОГО ГАЗУ

3.1. Вступ

Методи квантової фізики дозволяють враховувати вплив температури електронного газу на енергетичні втрати налітаючого іона. При цьому електрони можуть мати як ізотропний, так і анізотропний розподіл за швидкостями. Важка заряджена частинка найефективніше втрачає свою енергію при швидкостях V_i близьких до теплових швидкостей електронів v_e [21, 53, 80]. Аналітичні розв'язки для гальмівної здатності електронного газу можна знайти лише в декількох випадках: при високих $V_i \gg v_e$ і низьких $V_i \ll v_e$ швидкостях налітаючої частинки. Область, де частинка втрачає максимальну кількість енергії, найчастіше досліджується чисельно або екстраполяцією аналітичних результатів в вищезгаданих наближеннях.

В експериментах з електронного охолодження важких заряджених частинок електронний пучок має виражений анізотропний розподіл за швидкостями [49, 90], спричинений електростатичним прискорення електронів. Як наслідок, повздовжня температура, розкид за швидкостями в напрямку прискорення, зменшується, що є наслідком з теореми Ліувілля про збереження фазового простору пучка електронів [91]. Анізотропія температури електронного газу є однією з причин, так званого, швидкого електронного охолодження, в результаті якого пришвидшується в кілька разів обмін енергією між накопичуваними іонами та електронним газом [19].

В підрозділі 3.2. досліджено вплив ізотропної температури електронного газу T_e на енергетичні втрати. Знайдено аналітичні вирази для діелектричної сприйнятливості електронного газу з ізотропним розподілом за швидкостями. Виконані аналітичні розрахунки втрат енергії важкої зарядженої частинки в наближенні високих та низьких швидкостей налітаючої частинки. Чисельно отримана залежність гальміної здатності електронного газу від швидкості

налітаючої частинки для різних значень температур електронів. Результати чисельного розрахунку добре узгоджуються з аналітичними наближеними обчисленнями та експериментальними даними.

В підрозділі 3.3. розвинуто квантово-польовий підхід для врахування впливу анізотропної температури електронного газу на енергетичні втрати зарядженої частинки. В пункті 3.2.1., розрахована діелектрична проникність електронного газу для максвелівського двох-температурного розподілу за швидкостями. В пунктах 3.2.2., 3.2.3. представлені аналітичні результати для гальмівної здатності електронного газу в наближеннях: а) високих $V_i \gg v_{e\perp,\parallel}$ та низьких $V_i \ll v_{e\perp,\parallel}$ швидкостей налітаючої частинки, відповідно. В пункті 3.2.4. приводяться результати чисельного розрахунку виразу для енергетичних втрат, отриманого в рамках квантово-польового підходу. Отримано залежність сили тертя від швидкості налітаючої частинки для довільних значень температури та кутів вльоту. Результати чисельного розрахунку в рамках квантово-польового методів порівнюються з результатами, отриманими в рамках діелектричної моделі [53] та експериментальними даними, отриманими на установці NAP-M при дослідженні впливу анізотропного розподілу електронів на силу тертя.

3.2. Ізотропний розподіл за швидкостями

3.2.1. Поляризаційний оператор

Енергія, яку втрачає заряджена частинка, рухаючись в електронному газі, в рамках квантово-польового підходу визначається рівнянням [80]

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\varepsilon_{\vec{p}_1} - \varepsilon_{\vec{p}_1 - \vec{k}} \right) W_{\vec{k}} d^3k, \quad (3.1)$$

де

$$W_{\vec{k}} = \frac{2V_k^2}{1 - \exp\left(-\frac{\omega}{T_e}\right)} \operatorname{Im} \frac{\Pi(\vec{k}, \omega)}{1 - V_k \Pi(\vec{k}, \omega)}, \quad (3.2)$$

$$\varepsilon_{\vec{p}_i} = \frac{p_i^2}{2M_i} \quad (3.3)$$


енергія налітаючої іона,

$$\hbar\omega = \varepsilon_{\vec{p}_i} - \varepsilon_{\vec{p}_i - \hbar\vec{k}} = \hbar \frac{\vec{p}_i \vec{k}}{M_i} - \frac{\hbar^2 k^2}{2M_i} \quad (3.4)$$


енергія переходу із стану з імпульсом \vec{p}_i в стан з імпульсом $\vec{p}_i - \hbar\vec{k}$,

$$V_k = \frac{4\pi e}{k^2} \quad (3.5)$$

компонента Фур'є потенціалу кулонівської взаємодії, T_e — температура електронного газу (середня енергія теплового руху, постійна Больцмана $k_B = 1$), M_i — маса налітаючої частинки; p_i — імпульс налітаючого іона; k — хвильовий вектор; $\Pi(\vec{k}, \omega)$ — поляризаційний оператор.

Із рівняння (3.1) слідує, що втрати енергії визначаються дійсною та уявною частинами поляризаційного оператора (діелектричної сприйнятливості). В рамках плазмової моделі зазвичай поляризаційному оператору відповідає поняття діелектрична проникність або діелектрична  сприйнятливість. Ці поняття пов'язані між собою за допомогою рівняння [82]:

$$\varepsilon(\vec{k}, \omega) = 1 + \kappa(\vec{k}, \omega) = 1 - \frac{4\pi e}{k^2} \Pi(\vec{k}, \omega), \quad (3.6)$$

Явний вигляд поляризаційного оператора $\Pi(\vec{k}, \omega)$ у випадку достатньо розрідженої плазми або у випадку низькотемпературного газу великої густини, в однопетльовому  наближенні $\Pi(\vec{k}, \omega)$ без зовнішнього магнітного поля запишеться як [80]

$$\Pi(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{n_{\vec{p}+\vec{k}/2} - n_{\vec{p}-\vec{k}/2}}{\vec{p}\vec{k} - \omega - i\nu}, \quad (3.7)$$

де n_p — Фермі-функція розподілу електронів за швидкостями.

$$n_p = \frac{1}{\exp[(\varepsilon_p - \mu)/T_e] + 1}, \quad (3.8)$$

де ε_p — енергія частинок, μ — хімічний потенціал, який у випадку "нехолодної" плазми записується через енергію Фермі E_F :

$$\mu = E_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} (E_F/T_e)^{-2} + \frac{\pi^4}{80} (E_F/T_e)^{-4} + \dots \right]. \quad (3.9)$$

У випадку, коли $\varepsilon_p \gg E_F$, справедливий розподіл Максвела:

$$n_p = \exp\left(-\frac{\varepsilon_p}{T_e}\right). \quad (3.10)$$

Відзначити, що густина частинок плазми визначається через функцію розподілу, як [80]

$$n = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p n_p \quad (3.11)$$

або в безрозмірних величинах

$$n = \frac{(m_e V_0)^3}{(2\hbar\pi)^3} \int d^3r n_r. \quad (3.12)$$

Проведемо додаткові розрахунки

$$\alpha = \int d^3r n_r.$$

$$n = \frac{(m_e V_0)^3}{(2\hbar\pi)^3} \alpha.$$

$$\frac{(m_e V_0)^3}{(2\hbar\pi)^3} = \frac{n}{\alpha}. \quad (3.13)$$

Для максвелівської плазми $n_r = \exp(-\varepsilon_r \beta)$:

$$\alpha = \int d^3r \exp\left(-\frac{r^2}{2\tau}\right) = (2\pi\tau)^{3/2}. \quad (3.14)$$

Знайдемо явний вигляд поляризаційного оператора, скориставшись відомим розв'язком для діелектричної проникності [57] в одномірному випадку та узагальнимо його для 3-мірного.

Введемо позначення:

$$\Phi(\vec{k}) = \int d^3r \frac{\exp(-\vec{r}^2/2\tau)}{\vec{k}\vec{r} - \lambda}. \quad (3.15)$$

Щоб виконати інтегрування по d^3r , виконаємо поворот системи відліку так, щоб співнаправити одну з осей, наприклад, вісь Oz вздовж зовнішнього для інтеграла $\Phi(\vec{k})$ параметра \vec{k} (внутрішня змінна інтегрування пробігає всі можливі в дійсній області значення).

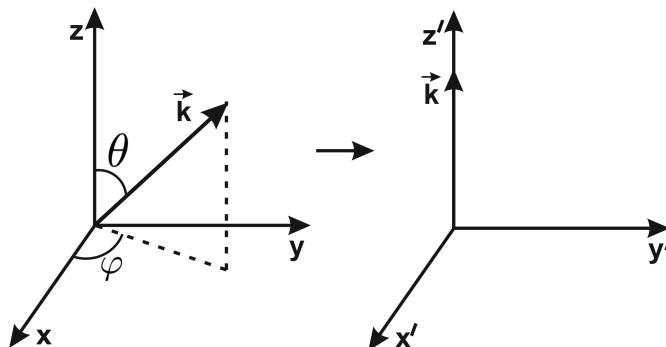


Рис. 3.1. Перехід до нової системи відліку. $\vec{k} \parallel \vec{e}_{z'}$

В нових координатах (3.17)

$$\Phi(\vec{k}) = \int d^3r \frac{\exp(-(x^2 + y^2 + z^2)/2\tau)}{kz - \lambda}, \quad (3.16)$$

де $\vec{r} = (x, y, z)$.

Інтеграл по координатам x, y — інтеграл Пуассона, тому

$$\Phi(\vec{k}) = 2\pi\tau \int dz \frac{\exp(-z^2/2\tau)}{kz - \lambda}. \quad (3.17)$$

Як результат, уявна та дійсна частини діелектричної сприйнятливості рівні

$$\text{Im}\kappa(\vec{k}, \omega) = \sqrt{\frac{\pi m_e \omega_P^2 m_e}{2T_e \hbar k}} \frac{m_e}{k^2} \sum_{j=1}^2 (-1)^j \exp(-\xi_j^2). \quad (3.18)$$

$$\text{Re}\kappa(\vec{k}, \omega) = \sqrt{\frac{\pi m_e \omega_P^2 m_e}{2T_e \hbar k}} \frac{m_e}{k^2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \exp(-\xi_j^2) \text{erfi}(\xi_j), \quad (3.19)$$

де

$$\xi_j = \frac{1}{\hbar k} \sqrt{\frac{m_e}{2T_e}} \left(\hbar\omega + (-1)^{j+1} \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e} \right). \quad (3.20)$$

3.2.2. Наближення великих швидкостей налітаючої частинки.

У випадку, коли швидкість налітаючого іона значно перевищує середню теплову швидкість електронів $v_e/V_i \ll 1$

$$\xi_j \gg 1. \quad (3.21)$$

Скористаємося розвиненням в ряд типу

$$e^{-x^2} \operatorname{erfi}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{x} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{1}{x^2} + \frac{3}{8} \frac{1}{x^4} + \dots \right], \quad |x| \gg 1. \quad (3.22)$$

Дійсна частина поляризаційного оператора в наближенні $v_e/V_i \ll 1$ має вигляд

$$\operatorname{Re}\Pi(k, \omega) = \frac{k^2 \omega_P^2}{4\pi e \omega^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{k^2 \hbar^2 k^2}{\omega^2 4m_e^2}\right)} \left[1 + \frac{v_e^2 k^2}{\omega^2} \frac{\left(3 + \frac{k^2 \hbar^2 k^2}{\omega^2 4m_e^2}\right)}{\left(1 - \frac{k^2 \hbar^2 k^2}{\omega^2 4m_e^2}\right)^2} + 3v_e^4 \frac{k^4}{\omega^4} \frac{\left(5 + 10 \frac{k^2 \hbar^2 k^2}{\omega^2 4m_e^2} + \frac{k^4 \hbar^4 k^4}{\omega^4 16m_e^4}\right)}{\left(1 - \frac{k^2 \hbar^2 k^2}{\omega^2 4m_e^2}\right)^4} \right]. \quad (3.23)$$

Уявна частина має значення на порядок менше за параметром v_e/V_i . Нехтуючи квантовими поправками, отримаємо добре відомий в класичному плазмовому підході вираз для діелектричної проникності [57]

$$\varepsilon(\vec{k}, \omega) = 1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2} \left[1 + 3v_e^2 \frac{k^2}{\omega^2} + 15v_e^4 \frac{k^4}{\omega^4} + \dots \right]. \quad (3.24)$$

Підставимо вираз (3.23) в рівняння (3.1) і отримаємо вираз для втрат енергії в електронному газі в наближенні високих швидкостей налітаючої частинки з точністю до v_e^2/V_i^2

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{q^2 \omega_P^2}{V_i} \left(L_C - \frac{3}{2} \frac{T_e}{m_e V_i^2} \right), \quad (3.25)$$

де кулонівський логарифм має вигляд $L_C = \ln \frac{m_e M V_i^2}{(M + m_e) \hbar \omega_P}$. Значення Кулонівського логарифма $L_C \sim 10$. Тому вклад в енергетичні втрати від температурних поправок на порядок менший.

3.2.3. Наближення малих швидкостей налітаючої частинки.

Розглянемо наступний випадок — наближення малих швидкостей налітаючої частинки $v_e/V_i \gg 1$. Малим параметром задачі виступає величина

$$\xi \ll 1. \quad (3.26)$$

Скористаємося розвиненнями в ряд

$$\exp(-x) = 1 - x + x^2/2 \dots, \quad x \ll 1;$$

$$\operatorname{erfi}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + \dots \right), \quad x \ll 1.$$

Уявна частина, тоді рівна

$$\operatorname{Im} \kappa(\vec{k}, \omega) = \sqrt{\frac{\pi m_e \omega_P^2}{2T_e}} \frac{m_e}{\hbar k} \exp \left\{ -\frac{\hbar^2 k^2}{2m_e T_e} \right\} \left(\sqrt{\frac{m_e \omega}{2T_e}} \frac{\omega}{k} - \frac{m_e^{3/2} \omega^3}{(2T_e)^{3/2} k^3} \left[1 - \frac{2}{3} \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e T_e} \right] \right). \quad (3.27)$$

Дійсна частина діелектричної сприйнятливості в наближенні малих швидкостей налітаючої частинки

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\kappa(\vec{k}, \omega) = & \sqrt{\frac{\pi m_e \omega_P^2 m_e}{2T_e \hbar k k^2}} \left[\exp \left\{ -\frac{\hbar^2 k^2}{2m_e T_e} \right\} \operatorname{erfi} \left(\frac{\hbar k}{\sqrt{2m_e T_e}} \right) - \right. \\ & \left. \frac{m_e \omega^2}{2T_e k^2} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\hbar k}{\sqrt{2m_e T_e}} + \left[1 - 4 \frac{1}{2} \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e T_e} \right] \exp \left\{ -\frac{\hbar^2 k^2}{2m_e T_e} \right\} \operatorname{erfi} \left(\frac{\hbar k}{\sqrt{2m_e T_e}} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Знехтуємо квантовими поправками, спрямувавши постійну Планка до нуля $\hbar \rightarrow 0$,

$$\operatorname{Re}\kappa(\vec{k}, \omega) = \frac{m_e \omega_P^2}{T_e} \frac{1}{k^2} \left[1 - 2 \frac{m_e \omega^2}{2T_e k^2} \right]; \quad (3.29)$$

$$\operatorname{Im}\kappa(\vec{k}, \omega) = \frac{m_e \omega_P^2}{T_e} \frac{1}{k^2} \left(\sqrt{\frac{m_e \omega}{2T_e k}} - \frac{m_e^{3/2} \omega^3}{(2T_e)^{3/2} k^3} \right). \quad (3.30)$$

Із рівнянь (3.29) та (3.30) слідує, що в наближенні малих швидкостей налітаючої частинки

$$\operatorname{Re}\kappa(k, \omega) \gg \operatorname{Im}\kappa(k, \omega). \quad (3.31)$$

Підставимо (3.29) та (3.30) в (3.1). Енергетичні втрати рівні

$$-\frac{dE}{dt} \approx \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^2 \omega_P^2 V_i^2}{v_e^3} \left[L_C - \frac{1}{2} \right]. \quad (3.32)$$

Якщо в наближенні великих швидкостей теплова швидкість не відіграла

суттєвої ролі, то в наближенні малих швидкостей налітаючого іона енергетичні втрати обернено пропорційні тепловій швидкості електронів в кубі $-dE/dt \propto 1/v_e^3$.

3.2.4. Чисельний розрахунок

Порівняємо результати чисельного розрахунку з аналітичними виразами, отриманими в наближеннях великої швидкості налітаючої частинки (3.25) та малої швидкості налітаючої частинки (3.32), з результатами чисельного розрахунку загального рівняння (3.1). Для чисельного розрахунку вибрані типові параметри електронного охолодження для проекту HESR [39] : $\omega_P = 2.9 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$, температура електронного газу $T_e = 10^{-4} \div 1 \text{ еВ}$.

На рис. 3.2 представлені результати чисельного розрахунку гальмівної здатності електронного газу від швидкості налітаючої зарядженої частинки. Електронний газ має ізотропний розподіл за швидкостями: квадрати — $T_e = 1 \text{ еВ}$, круги — $T_e = 10^{-1} \text{ еВ}$, трикутники — $T_e = 10^{-2} \text{ еВ}$, ромби — $T_e = 10^{-3} \text{ еВ}$, зірки — $T_e = 10^{-4} \text{ еВ}$. Суцільна лінія відповідає аналітичному результату, отриманому в наближенні великих швидкостей $v_e/V_i \ll 1$, пунктирні лінії — наближення малих швидкостей $v_e/V_i \gg 1$ для представленого спектру температур електронного газу. Зі зниженням температури електронного газу відбувається ріст значень гальмівної здатності. При цьому максимум сили тертя зміщується в сторону менших швидкостей налітаючої частинки. Їх положення відповідає значенням $V_i = \sqrt{2}v_e$. При низьких швидкостях іона спостерігається лінійна залежність енергетичних втрат важкої зарядженої частинки від швидкості $dE/dl \propto \frac{V_i}{v_e^3} L_c$. Кут нахилу прямих залежить від значень теплових швидкостей електронного газу. При швидкостях іона, що перевищують теплові швидкості електронного газу, температура електронного газу перестає відігравати суттєву роль — результати лягають на одну криву залежності сили тертя від швидкості іона $dE/dl \propto 1/V_i^2 L_c$. Отримані результати чисельних розрахунків добре описуються аналітичними виразами

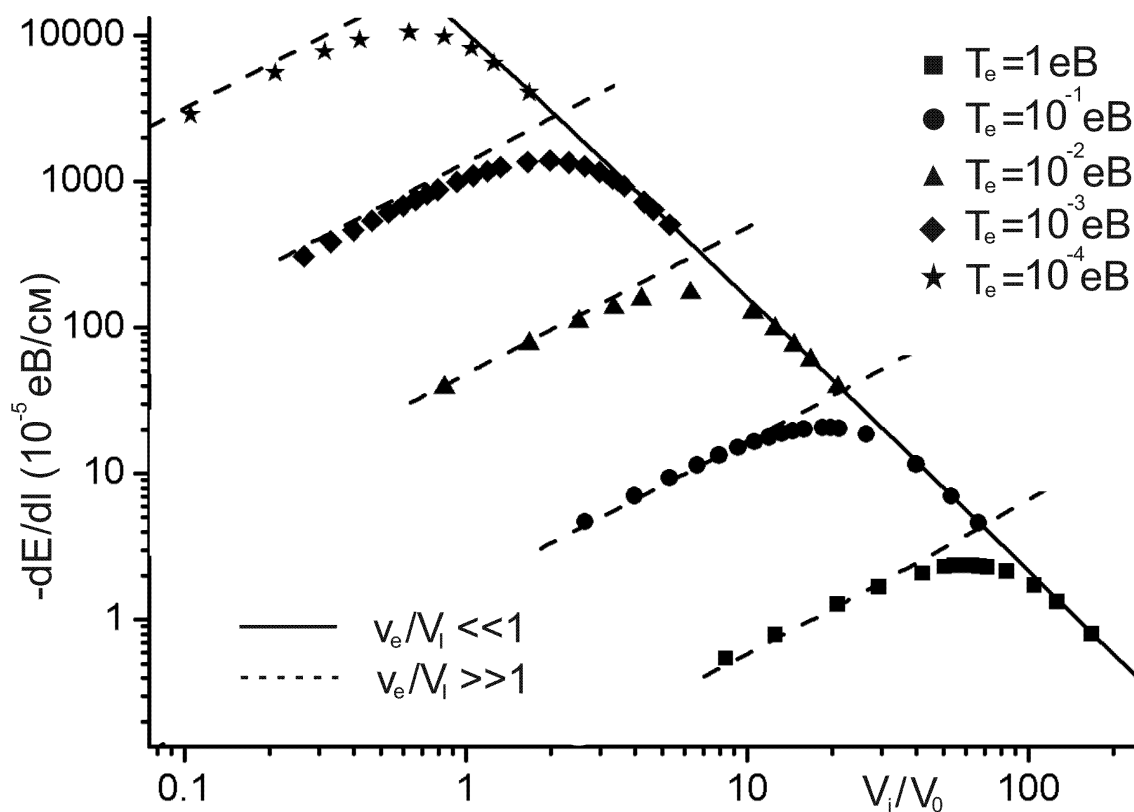


Рис. 3.2. Залежність гальмівної здатності електронного газу від швидкості налітаючої важкої зарядженої частинки. Температура електронного газу ізотропна: квадрати — $T_e = 1$ eV, круги — $T_e = 10^{-1}$ eV, трикутники — $T_e = 10^{-2}$ eV, ромби — $T_e = 10^{-3}$ eV, зірки — $T_e = 10^{-4}$ eV. Суцільна лінія — наближення великих швидкостей $v_e/V_i \ll 1$, пунктирні лінії — наближення малих швидкостей $v_e/V_i \gg 1$ для представленого спектру температур електронного газу. Швидкість вимірюється в одиницях $V_0 = 10^{-6}$ см/с. Вісі мають логарифмічні шкали.

при малих та великих швидкостях важкої зарядженої частинки.

Додатковою перевіркою результатів чисельного розрахунку, отриманих для енергетичних втрат протона в електронному газі з ізотропним розподілом за швидкостями, в рамках квантово-польового підходу, може слугувати порівняння з результатами роботи [85]. Розрахунки в вище згаданій роботі, автори також використовували квантово-польовий формалізм, проводили з наступними параметрами: плазмова частота електронів $\omega_p = 5.64 \cdot 10^{11} \text{ c}^{-1}$, температура електронного газу $T_e = 8.63$ eV.

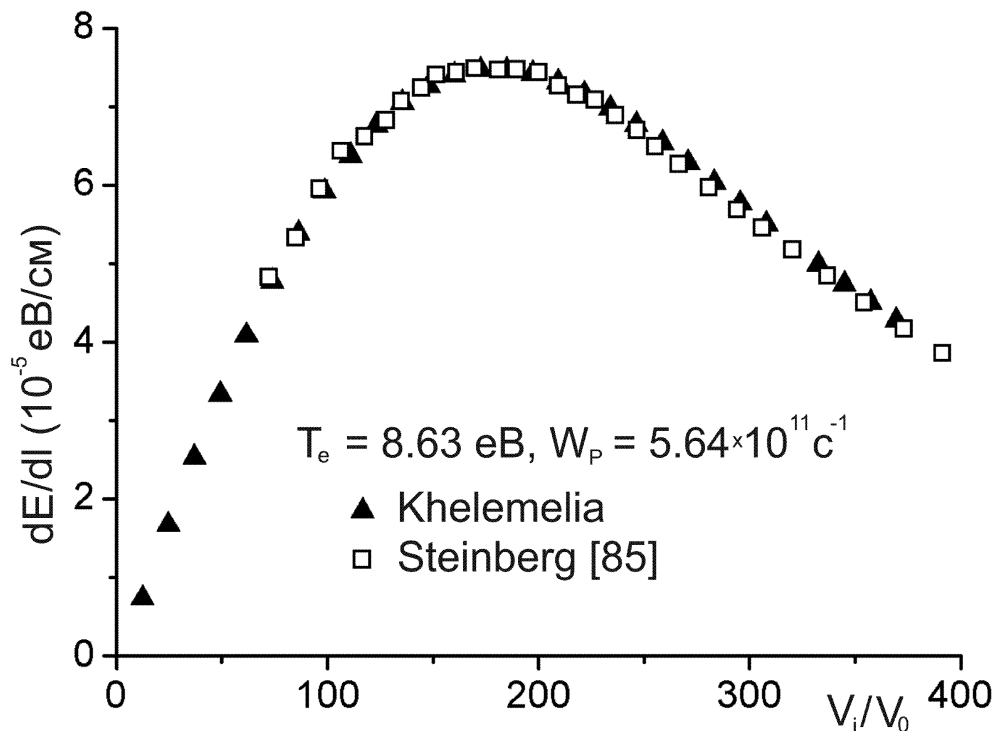


Рис. 3.3. Залежність гальмівної здатності електронного газу від швидкості налітаючої важкої зарядженої частинки. Порівняння результатів чисельного розрахунків, отриманих в рамках квантової теорії поля (трикутники) та в роботі [85] (квадрати). Температура електронного газу $T_e = 8.63 \text{ eV}$, плазмова частота електронів $\omega_p = 5.64 \cdot 10^{11} \text{ c}^{-1}$. Швидкість вимірюється в одиницях $V_0 = 10^{-6} \text{ c}^{-1}$.

Результати, отримані в обох роботах добре узгоджуються.

3.3. Анізотропний розподіл за швидкостями

3.3.1. Поляризаційний оператор

Нехай електронний газ описується двохтемпературною максвелівською функцією розподілу, з анізотропією вздовж вісі z [57]:

$$n_p = \exp\left(-\frac{p_x^2 + p_y^2}{2m_e T_{e\perp}}\right) \exp\left(-\frac{p_z^2}{2m_e T_{e\parallel}}\right), \quad (3.33)$$

де поперечна та повздовжня температури визначаються як $T_{e\perp} = m_e v_{e\perp}^2$ і $T_{e\parallel} = m_e v_{e\parallel}^2$, відповідно. $v_{e\perp}$ і $v_{e\parallel}$ — середні поперечна та повздовжня теплові швидкості.

Поляризаційний оператор зручно представити у вигляді суми доданків: з початковим $n_{\vec{p}}$ та кінцевим $n_{\vec{p}-\hbar\vec{k}}$ станами розподілу за швидкостями [80]

$$\Pi(\vec{k}, \omega) = \Pi = \Pi_1 + \Pi_2, \quad (3.34)$$

де

$$\Pi_1(\vec{k}, \omega) = \frac{e}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \frac{n_{\vec{p}}}{\varepsilon_{\vec{p}} - \varepsilon_{\vec{p}-\hbar\vec{k}} - \hbar\omega}; \quad (3.35)$$

$$\Pi_2(\vec{k}, \omega) = -\frac{e}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \frac{n_{\vec{p}-\hbar\vec{k}}}{\varepsilon_{\vec{p}} - \varepsilon_{\vec{p}-\hbar\vec{k}} - \hbar\omega}, \quad (3.36)$$

$\varepsilon_{\vec{p}} = p^2/2m_e$ енергія електрона.

Умова нормування для функції розподілу $n_{\vec{p}}$:

$$n = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p n_p. \quad (3.37)$$

Знайдемо для анізотропного розподілу за швидкостями n_p значення інтегралу з рівняння (3.37)

$$\int d^3p \exp\left(-\frac{p_x^2 + p_y^2}{2m_e T_{e\perp}}\right) \exp\left(-\frac{p_z^2}{2m_e T_{e\parallel}}\right) = (2\pi m_e)^{3/2} T_{e\perp} \sqrt{T_{e\parallel}}. \quad (3.38)$$

Перепишемо вираз для поляризаційного оператора (3.34) з урахуванням виразу (3.38) у вигляді

$$\Pi_1(\vec{k}, \omega) = \frac{en}{\hbar} \frac{1}{(2\pi m_e)^{3/2} T_{e\perp} \sqrt{T_{e\parallel}}} \int d^3 p \frac{\exp\left(-\frac{p_\perp^2}{2m_e T_{e\perp}} - \frac{p_z^2}{2m_e T_{e\parallel}}\right)}{\frac{\vec{p}\vec{k}}{m_e} - \frac{\hbar}{2m_e} k^2 - \omega}, \quad (3.39)$$

$$\Pi_2(\vec{k}, \omega) = \frac{en}{\hbar} \frac{(-1)}{(2\pi m_e)^{3/2} T_{e\perp} \sqrt{T_{e\parallel}}} \int d^3 p \frac{\exp\left(-\frac{p_\perp^2}{2m_e T_{e\perp}} - \frac{p_z^2}{2m_e T_{e\parallel}}\right)}{\frac{\vec{p}\vec{k}}{m_e} + \frac{\hbar}{2m_e} k^2 - \omega}. \quad (3.40)$$

Виконаємо заміну змінної інтегрування $p_z \rightarrow p_z^*$

$$p_z = p_z^* \sqrt{\frac{T_{e\parallel}}{T_{e\perp}}} \quad dp_z = dp_z^* \sqrt{\frac{T_{e\parallel}}{T_{e\perp}}}. \quad (3.41)$$

Введемо новий хвильовий вектор \vec{k}^* , що відрізняється від вектора \vec{k} значенням повздовжньої компоненти:

$$|k^*| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \frac{T_{e\parallel}}{T_{e\perp}}}. \quad (3.42)$$

Використовуючи зв'язок поляризаційного оператора та діелектричної сприйнятливості рівняння (3.6), для анізотропного розподілу за швидкостями із замінами (3.41) і (3.42) в рівняннях (3.39) і (3.40) розрахунок діелектричної сприйнятливості проводиться аналогічно до випадку ізотропного розподілу в електронному газі в підрозділі 3.2.1.:

$$\kappa(k, \omega) = \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \left(\frac{\pi m_e}{2T_{\perp}} \right)^{1/2} \frac{\omega_P^2 m_e}{\hbar k^* k^2} \exp(-\xi_j^2) [i - \operatorname{erfi}(\xi_{\pm})], \quad (3.43)$$

де

$$\xi_j = \frac{\sqrt{m_e}}{\sqrt{2T_{\perp}}} \left(\frac{\omega}{k^*} + (-1)^{j-1} \frac{\hbar k}{2m_e k^*} \right), \quad j = 1, 2. \quad (3.44)$$

Рівняння (3.43) у випадку рівності повздовжньої та поперечної температур $T_{e\perp} = T_{e\parallel} = T_e$ переходять в рівняння (3.18), (3.19) для ізотропного розподілу.

3.3.2. Наближення великих швидкостей налітаючої частинки

У випадку, коли налітаюча частинка рухається зі швидкістю V_i , яка значно перевищує середні теплові швидкості електронного газу, можливе розвинення виразу для діелектричної сприйнятливості за малим параметром

$$\frac{\omega}{k^* v_{e\perp}} \gg 1. \quad (3.45)$$

$$\varepsilon(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2} \left[1 + 3 \frac{k^2}{\omega^2} \left(v_{e\perp}^2 + \frac{\omega^2}{k^2 V_i^2} (v_{e\parallel}^2 - v_{e\perp}^2) \right) + 15 \frac{k^4}{\omega^4} \left(v_{e\perp}^2 + \frac{\omega^2}{k^2 V_i^2} (v_{e\parallel}^2 - v_{e\perp}^2) \right)^2 \right]. \quad (3.46)$$

Уявна частина за даних умов значно менша за дійсну частину

$$\operatorname{Im}\kappa(\vec{k}, \omega) \ll \operatorname{Re}\kappa(\vec{k}, \omega), \quad (3.47)$$

тому нею можна знехтувати.

Вираз (3.46) при рівних значеннях повздовжньої та поперечної температур переходить в ізотропний випадок (3.24).

Визначимо втрати енергії при рухові налітаючої частинки вздовж напрямку анізотропії в електронному газі після підстановки (3.46) в рівняння (3.1). З точністю до членів порядку $v_{e\perp,\parallel}^2/V_i^2$ повздовжні втрати рівні:

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{e^2\omega_P^2}{V_i} \left(1 + 3\frac{T_{e\parallel}}{m_e V_i^2} - 3\frac{T_{e\perp}}{m_e V_i^2} \right) L_C - \frac{3}{2} \frac{T_{e\parallel}}{m_e V_i^2}. \quad (3.48)$$

3.3.3. Наближення малих швидкостей налітаючої зарядженої частинки

Малим параметром задачі виступає співвідношення

$$\frac{\omega}{k^* v_{e\perp}} \ll 1. \quad (3.49)$$

В даному наближенні дійсна та уявна частини поляризаційного оператора приймають вигляд

$$\text{Re}\kappa(\vec{k}, \omega) \approx \frac{\omega_P^2}{k^{*2} v_{e\perp}^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{k^{*2} v_{e\perp}^2} \right). \quad (3.50)$$

$$\text{Im}\kappa(\vec{k}, \omega) = \frac{\omega_P^2}{k^{*2} v_{e\perp}^2} \frac{\omega}{k^* v_{e\perp}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{k'^2 v_{e\perp}^2} \right). \quad (3.51)$$

Уявна частина за даних умов значно менша за дійсну частину

$$\text{Im}\kappa(\vec{k}, \omega) \ll \text{Re}\kappa(\vec{k}, \omega). \quad (3.52)$$

З урахуванням явного вигляду дійсної (3.50) та уявної (3.51) частин поляризаційного оператора електронного газу з анізотропним розподілом за температурою, гальмівна здатність остаточно прийме вигляд

$$-\frac{dE}{dl} \approx \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^2 \omega_P^2}{v_{e\perp}^2 v_{e\parallel}} V_i \left[L_C - \frac{1}{2} \right]. \quad (3.53)$$

Подібний вираз для сили тертя (3.53) отримано у рамках парної теорії [21] в наближенні малих швидкостей налітаючого іона.

3.3.4. Чисельний розрахунок

Повздожний рух

Хоча в рамках класичних та квантових теорій вдається розрахувати гальмівну здатність електронного газу з анізотропним розподілом за швидкостями для випадків малих та великих швидкостей налітаючої зарядженої частинки, проте область, де іон втрачає максимум своєї енергії, вдається дослідити тільки чисельними методами.

Для конкретизації чисельного розрахунку повздожних до вісі анізотропії температури енергетичних втрат важкої зарядженої частинки використаємо значення концентрації та температури електронів типові, наприклад, для роботи електронного охолоджувача на накопичувальному кільці протонів та антипротонів HESR [35]: плазмова частота електронів — $\omega_P = 2.9 \cdot 10^8 \text{ c}^{-1}$, поперечна температура — $T_{e\perp} = 1 \text{ eV}$.

Скористаємось поняттям параметра анізотропії [53], що чисельно рівний відношенню повздожньої температури до поперечної

$$\gamma = T_{e\perp}/T_{e\parallel}. \quad (3.54)$$

Для експериментів з електронного охолодження характерними значеннями для параметра анізотропії є $\gamma \gg 1$.

На рис. 3.4 представлена залежність гальмівної здатності електронного газу з анізотропним розподілом за імпульсами від швидкості налітаючої частинки. Залежність побудована для різних значень параметра анізотропії γ при фіксованій поперечній температурі $T_{e\perp} = 1$ еВ.

Максимуми на кривих залежності гальмівної здатності спостерігаємо при швидкостях налітаючого іона близьких до теплових позаддовжніх швидкостей електронного газу. Найнижча крива (зірки) відповідає значенню найвищої позаддовжньої температури (10 еВ). При зменшенні значень позаддовжньої температури (1 еВ — ромби; 10^{-1} еВ — трикутники; 10^{-2} еВ — круги; 10^{-3} еВ — квадрати) максимум енергетичних втрат зростає.

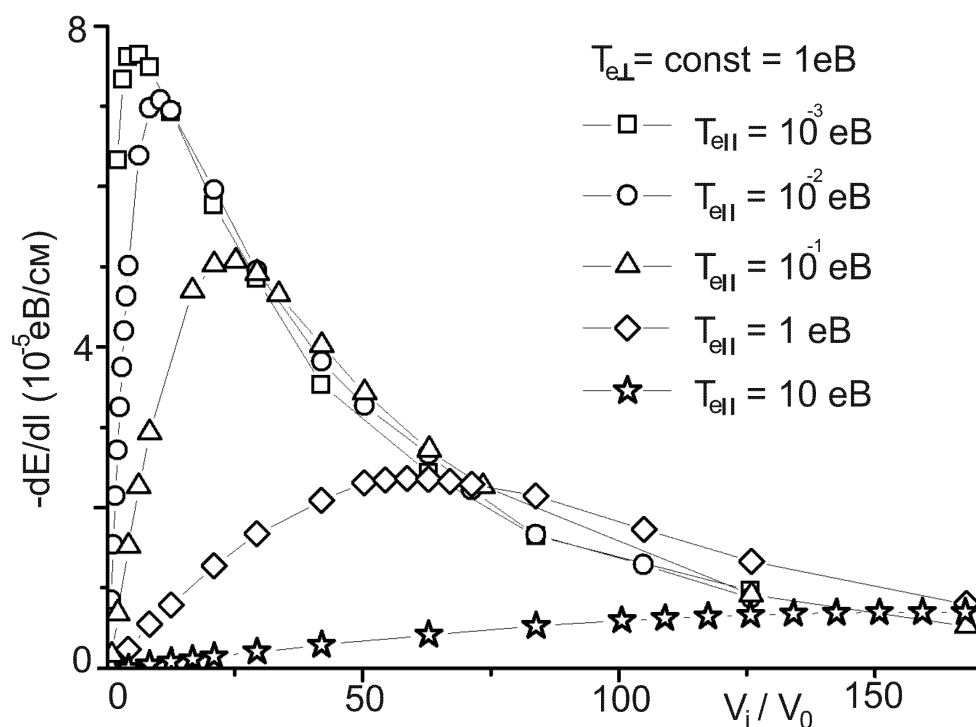


Рис. 3.4. Залежність гальмівної здатності e^- -газу (в одиницях 10^{-5} еВ/см) від швидкості протона. Поперечна температура фіксована $T_{e\perp} = 1$ еВ.

Повздовжня температура змінюється: зірки— 10 еВ, ромби — 1 еВ, трикутники — 0.1 еВ, круги — 0.01 еВ, квадрати — 10^{-3} еВ. Швидкість протона V_i в одиницях $V_0 = 10^6$ см/с.

На рис. 3.5 представлено залежність гальмівної здатності електронного

газу від швидкості налітаючої зарядженої частинки у випадку, коли фіксованою є повздовжня температура $T_{e\parallel} = 1 \text{ eV}$, а поперечна змінюється (10 eV — лінія із зафарбованими квадратами; 1 eV — лінія із зафарбованими кругами; 10^{-1} eV — лінія із зафарбованими трикутниками; 10^{-2} eV — лінія із зафарбованими ромбами; 10^{-3} eV — лінія із зафарбованими зірками). Максимуми кривих майже не змінюють свого положення, яке співпадає зі значенням теплової повздовжньої швидкості. Найвищий максимум кривих відповідає найнижчій поперечній температурі електронного газу $T_{e\perp} = 10^{-3} \text{ eV}$.

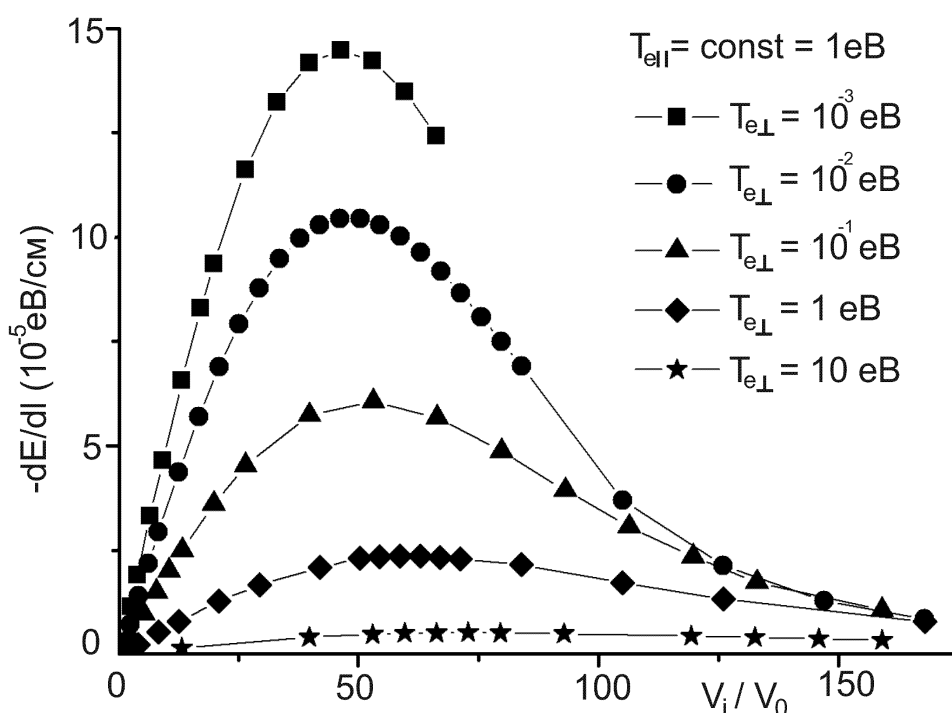


Рис. 3.5. Залежність гальмівної здатності e^- -газу (в одиницях 10^{-5} eV/cm) від швидкості протона. Повздовжня температура фіксована $T_{e\parallel} = 1 \text{ eV}$. Поперечна температура змінюється: квадрати — 10 eV, трикутники — 1 eV, круги — 0.1 eV, ромби — 0.01 eV, зірки — 10^{-3} eV . Швидкість протона V_i в одиницях $V_0 = 10^6 \text{ cm/s}$.

При великих швидкостях налітаючої частинки $V_i/v_e \gg 1$ всі криві залежностей поступово "зливаються" в одну криву, що визначається рівнянням (3.48). Для малих значень швидкостей налітаючої частинки спостерігаємо лінійну залежність гальмівної здатності. Кут нахилу ліній визначається з

рівняння (3.53).

Із рис. 3.4-3.5 бачимо, що чим нижчі теплові швидкості електронного газу, тим ефективніше важка заряджена частинка передаватиме свою енергію. Низькі значення повздовжніх температур в системі, пов'язаній з електронним пучком, отримуються за рахунок прискорення електронів.

Кутова залежність гальмівної здатності

Дослідимо кутову залежність гальмівної здатності для двох типів анізотропного розподілу за швидкостями $\gamma = 10^2$ і $\gamma = 10^{-2}$. Для чисельного розрахунку використаємо наступні параметри [cite NersToerfferZwick2007eng](#): електронна концентрація

$$n_e = 10^8 \text{ eV}^{-3},$$

температури

$$\left. \begin{aligned} T_{\parallel} &\approx 1.4925 \cdot 10^{-3} (\text{eV}) \\ T_{\perp} &\approx 1.4925 \cdot 10^{-1} (\text{eV}). \end{aligned} \right\} \gamma = 10^2$$

і

$$\left. \begin{aligned} T_{\parallel} &\approx 2.94 \cdot 10^{-1} (\text{eV}) \\ T_{\perp} &\approx 2.94 \cdot 10^{-3} (\text{eV}). \end{aligned} \right\} \gamma = 10^{-2}$$

На рис. 3.6-3.7 порівнюються результати чисельного розрахунку, отримані в рамках квантово-польового підходу (криві з зафарбованими фігурами) і діелектричної моделі [53] (криві з незафарбованими фігурами). Залежності гальмівної здатності електронного газу з анізотропною температурою від швидкості іона побудовані для різних кутів α між векторами швидкості іона \vec{V}_i і вісі електронного пучка (вісі анізотропії): $\alpha = 0$ (лінія з квадратами), $\alpha = \pi/6$ (лінії з кругами), $\alpha = \pi/3$ (лінії з трикутниками), $\alpha = \pi/2$ (лінії з ромбами). Для $\gamma = 100$ максимум гальмівної здатності спостерігається у випадку повздовжнього руху. Для $\gamma = 0.01$ максимум гальмівної здатності спостерігається у випадку поперечного руху. При великих швидкостях іона залежності гальмівної здатності для різних кутів переходять в єдину криву —

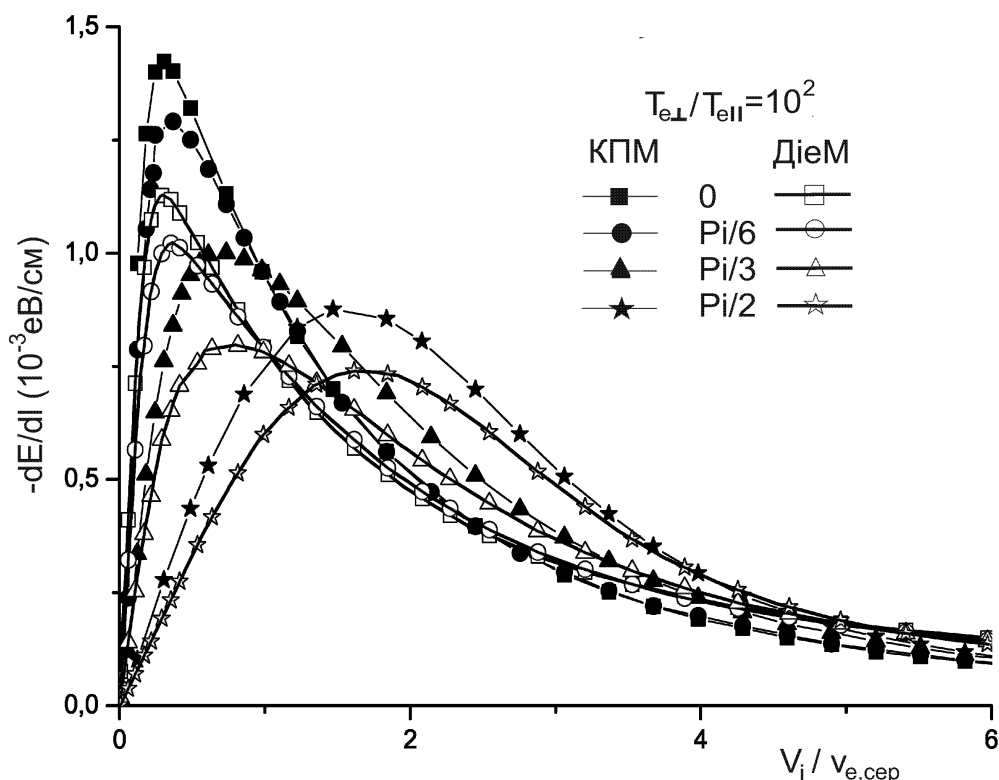


Рис. 3.6. Залежність гальмівної здатності електронного газу з анізотропною температурою (в одиницях meV/cm) (діелектрична теорія — лінія з незафарбованими фігурами; квантово-польові методи — лінія із зафарбованими фігурами) від швидкості протона V_i (в одиницях \bar{v}_e) для різних кутів α вльоту протона: $\alpha = 0$ — лінії з квадратами, $\alpha = \pi/6$ — лінії з кругами, $\alpha = \pi/3$ — лінії з трикутниками, $\alpha = \pi/2$ — лінії з ромбами. Параметр анізотропії $\gamma = 100$. $\bar{T}_e = 2/3 \cdot T_{e\perp} + 1/3 \cdot T_{e\parallel} = 0.1 \text{ eV}$, $n_e = 10^8 \text{ cm}^{-3}$

для швидкого іона електронний газ стає холодним, теплові ефекти нівелюються.

Положення максимумів залежностей гальмівної здатності, знайдені в рамках квантово-польового підходу та діелектричної моделі співпадають, але їх значення відрізняються в межах до 30%. Таку відмінність результатів чисельного розрахунку в квантовому та класичному підходах можна пояснити тим, що квантова теорія більш загальна, і включає в себе як крайні випадки діелектричну модель, яка враховує лише колективні ефекти, так і теорію парних зіткнень.

Експеримент

Наведемо результати чисельного розрахунку енергетичних втрат

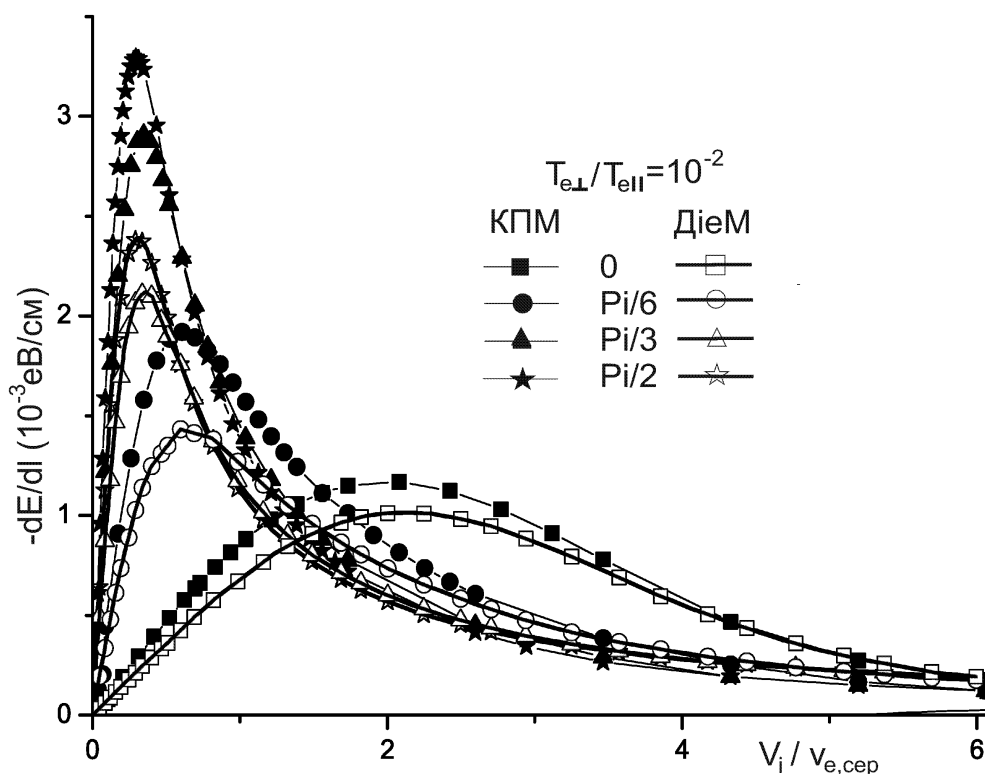


Рис. 3.7. Залежність гальмівної здатності електронного газу з анізотропною температурою (в одиницях меВ/см) (діелектрична теорія — лінія з незафарбованими фігурами; квантово-польові методи — лінія із зафарбованими фігурами) від швидкості протона V_i (в одиницях \bar{v}_e) для різних кутів α вльоту протона: $\alpha = 0$ — лінії з квадратами, $\alpha = \pi/6$ — лінії з кругами, $\alpha = \pi/3$ — лінії з трикутниками, $\alpha = \pi/2$ — лінії з ромбами.

Параметр анізотропії $\gamma = 0.01$. $\bar{T}_e = 2/3 \cdot T_{e\perp} + 1/3 \cdot T_{e\parallel} = 0.1$ еВ ,

$$n_e = 10^8 \text{ eV}^{-3}.$$

для параметрів експерименту [49, 92], проведеного на установці НАП-М, Новосибірськ, Інститут ядерних досліджень: повздовжня температура $T_{e\parallel} = 0.006$ еВ, поперечна температура $T_{e\perp} = 0.3$ еВ, плазмова частота електронів $\omega_P = 8 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$. Так, зокрема, одним із завдань дослідження в рамках експериментів на установці НАП-М було вивчення впливу анізотропного розподілу електронів за швидкостями на швидкість протікання електронного охолодження.

Згідно рис. 3.8 результати чисельного розрахунку добре описують експеримент. Дані узгоджуються для всіх значень швидкостей налітаючого іона.

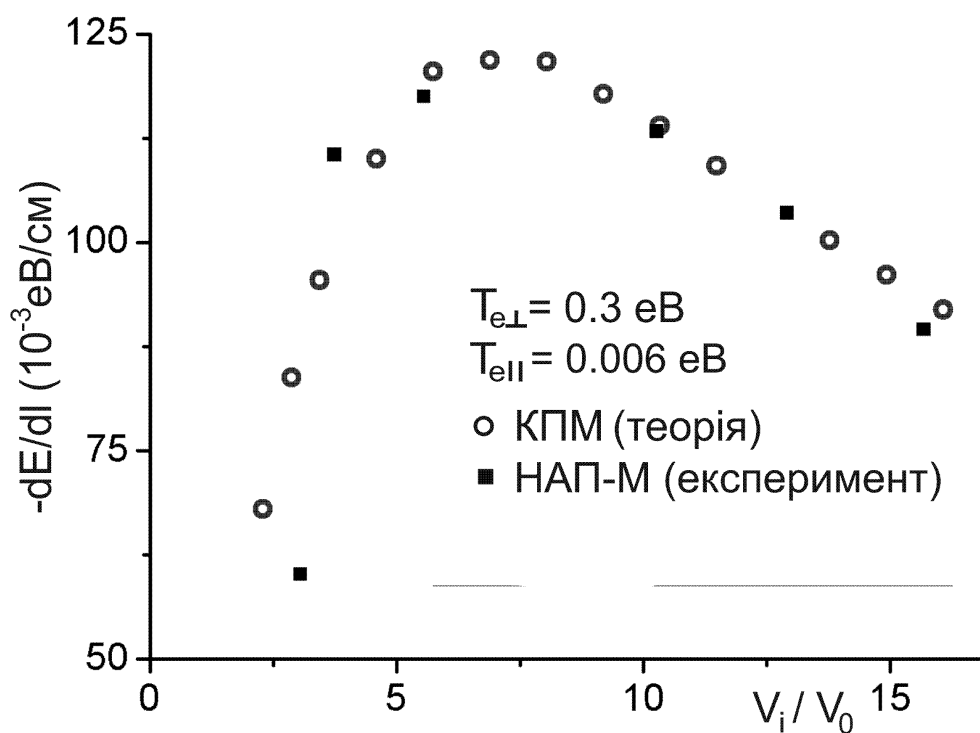


Рис. 3.8. Залежність гальмівної здатності електронного газу з анізотропною температурою (в одиницях eВ/см) від швидкості налітаючого іона. Круги — чисельний розрахунок, квадрати — результати експерименту на установці НАП-М [49, 92]. Швидкість вимірюється в одиницях $V_0 = 10^6 \text{ см/с}$.

3.4. Висновки до розділу 3

В даному розділі в рамках квантово-польового підходу був проаналізований вплив як ізотропної, так і анізотропної температури на енергетичні втрати важкої зарядженої частинки та отримані наступні результати:

1. Знайдено аналітичні вирази для дійсної та уявної частини у випадку ізотропного та анізотропного розподілів електронів за швидкостями. Використовуючи знайдені вирази, було проведено чисельний розрахунок енергетичних втрат іона в електронному газі. Результати чисельних розрахунків добре узгоджуються з аналітичними виразами у наближеннях великих та малих швидкостей налітаючої зарядженої частинки, з результатами інших авторів та з експериментальними даними.

2. У випадку ізотропної температури електронів: а) максимум сили тертя

зростає пропорційно зменшенню температури електронного газу, положення максимума відповідає значенням швидкості іона $V_i = \sqrt{2}v_e$; б) при низьких швидкостях іона спостерігається лінійна залежність енергетичних втрат важкої зарядженої частинки від швидкості $-dE/dl \propto \frac{V_i}{v_e^3} L_c$, де множник $\frac{V_i}{v_e^3}$ визначає кут нахилу прямих; в) при швидкостях іона, що перевищують теплові швидкості електронного газу, температура електронного газу перестає відігравати суттєву роль — результати лягають на одну криву залежності сили тертя від швидкості іона $-dE/dl \propto 1/V_i^2 L_c$.

3. Для анізотропного розподілу електронів за швидкостями детально проаналізовано два випадки: а) зафіксована поперечної температура; б) зафіксована повздожня температура. У випадку фіксованої повздожньої температури положення максимума гальмівної здатності для $T_{e\perp}/T_{e\parallel} \ll 1$ відповідає швидкостям налітаючого іона $V_i \approx 2\sqrt{V_{e\parallel}/3}$. Зменшення поперечної температури на 3 порядки призводить до росту максимуму гальмівної здатності в 6 разів, відносно ізотропного випадку. У випадку фіксованої поперечної температури положення максимуму гальмівної здатності визначається значенням середньої повздожньої теплової швидкості електронів, і при її зменшенні зміщується в область менших швидкостей. Зменшення повздожньої температури на 3 порядки призводить до росту максимуму гальмівної здатності в 3 рази, відносно ізотропного випадку.

РОЗДІЛ 4

ГАЛЬМІВНА ЗДАТНІСТЬ ЗАМАГНІЧЕНОГО ЕЛЕКТРОННОГО ГАЗУ З АНІЗОТРОПНОЮ ТЕМПЕРАТУРОЮ

4.1. Вступ

В експериментах з електронного охолодження для утримання електронного пучка від розльоту використовують зовнішнє однорідне магнітне поле. Магнітне поле спрямовують так, що напрями вектора магнітної індукції та вісь електронного пучка співпадали.

В цьому розділі розвинуто квантово-польовий формалізм для дослідження енергетичних втрат важкої зарядженої частинки в замагніченому електронному газі з врахуванням анізотропного розподілу електронів за швидкостями. Квантово-польовий підхід із перших принципів дає можливість врахувати вплив на енергетичні втрати як температури електронного газу [80], так і зовнішнього магнітного поля [82]. Вплив перелічених факторів є ключовим для експериментів з електронного охолодження [47, 49, 92].

В підрозділі 4.2. знайдено аналітичний вираз для діелектричної сприйнятливості магнітоактивного електронного газу з анізотропним розподілом електронів за швидкостями. В підрозділі 4.3. визначено в рамках квантово-польового підходу енергетичні втрати важкої зарядженої частинки в наближенні холодної електронної плазми. Чисельно знайдена залежність гальмівної здатності електронного газу в зовнішньому однорідному магнітному полі від швидкості протона в наближенні сильних магнітних полів з урахування температури електронного середовища.

4.2. Діелектрична сприйнятливість замагніченого електронного газу

4.2.1. Діелектрична сприйнятливість

Діелектрична сприйнятливість замагніченого електронного газу в загальному випадку в рамках квантово-польового підходу записується у вигляді [82]

$$\kappa(\vec{k}, \omega) = -\frac{2e^2 m_e \omega_H}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2} \sum_{\nu, \nu'} \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \Lambda_{\nu\nu'} \left(\frac{k_t}{\sqrt{2m_e \omega_H}} \right) \frac{n_{\nu p_z} - n_{\nu', p_z - k_z}}{\varepsilon_{\nu p_z} - \varepsilon_{\nu', p_z - k_z} - \omega}, \quad (4.1)$$

де n_α — функція розподілу електронів за енергією, $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{\nu p_z} = \omega_H(\nu + 1/2) + p_z^2/2m_e$ — енергія електронів в стані з квантовими числами ν, p_z , μ — хімічний потенціал, ω_H — циклотронна частота, $k_t = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ — поперечна до напрямку магнітного поля компонента хвильового вектора. Вісь $0z$ вибрана вздовж вектора магнітної індукції.

Оскільки $\Lambda_{\nu\nu'}$ не залежить від змінної інтегрування p_z , то винесемо її з під знаку інтегрування. Тоді, після відновлення всіх фізичних величин, запишемо

$$\kappa(\vec{k}, \omega) = -\frac{e^2 m_e \omega_H}{(2\pi \hbar)^2} \frac{1}{k^2} \sum_{\nu, \nu'} \Lambda_{\nu\nu'} \left(\frac{\hbar k_t}{\sqrt{2m_e \hbar \omega_H}} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \frac{n_{\nu p_z} - n_{\nu', p_z - \hbar k_z}}{\varepsilon_{\nu p_z} - \varepsilon_{\nu', p_z - \hbar k_z} - \hbar \omega}. \quad (4.2)$$

Перейдемо до безрозмірних величин: q_z — безрозмірний хвильовий вектор; h, w — безрозмірні циклотронна частота і частота переходу між рівнями енергії, відповідно; $\tau_{\parallel}, \tau_{\perp}$ — безрозмірні повздовжня та поперечна температури електронного газу, відповідно; r_z — безрозмірна повздовжня компонента імпульса електрона.

$$\kappa(\vec{k}, \omega) = -\frac{1}{2} \frac{4\pi e^2}{m_e \omega_0^2} \frac{(mV_0)^3 h}{(2\pi \hbar)^3 q^2} \sum_{\nu, \nu'} \Lambda_{\nu\nu'} \left(q_t \sqrt{\delta_0 h^{-1}} \right) \times \int_{-\infty}^{\infty} dr_z \frac{n_{\nu r_z} - n_{\nu', r_z - q_z}}{q_z r_z - \delta_0 q_z^2 + h(\nu - \nu') - w}, \quad (4.3)$$

4.2.2. Функція розподілу n_{ν,p_z}



Густина замагніченого електронного газу визначається як [82]

$$n = \frac{2\pi m_e \hbar \omega_H}{(2\pi \hbar)^3} \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n_{\nu,p_z} dp_z. \quad (4.4)$$

В безрозмірних величинах

$$n = \left[\frac{2\pi m_e^2 V_0 \hbar \omega_0}{(2\pi \hbar)^3} h \right] \alpha, \quad (4.5)$$

де

$$\alpha = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n_{\nu,r_z} dr_z. \quad (4.6)$$

Функція розподілу для електронного газу в зовнішньому магнітному полі має вигляд

$$n_{\nu,r_z} = \exp\left(-\frac{r_z^2}{2\tau_{\parallel}}\right) \exp\left(-\frac{2h(\nu + 1/2)\delta_0}{\tau_{\perp}}\right). \quad (4.7)$$

Підставимо функцію розподілу (4.7) у вираз для густини електронів (4.5)

$$n = \frac{2\pi m_e^2 V_0 \hbar \omega_0}{(2\pi \hbar)^3} h \int dp_z \exp\left(-\frac{r_z^2}{2\tau_{\parallel}}\right) \exp\left(-\frac{h\delta_0}{\tau_{\perp}}\right) \sum_{\nu=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{2h\nu\delta_0}{\tau_{\perp}}\right). \quad (4.8)$$

Сума представляє собою геометричну прогресію з $q = \exp(-2h\delta_0/\tau_{\perp})$.

$$S_n = \sum_1^N b_i = \frac{b_1 (q^N - 1)}{q - 1}, \quad q \neq 0. \quad (4.9)$$

Підставимо вираз (4.9)

$$n = \frac{2\pi m_e^2 V_0 \hbar \omega_0}{(2\pi \hbar)^3} h \sqrt{2\pi\tau_{\parallel}} \exp\left(-\frac{h\delta_0}{\tau_{\perp}}\right) \times \left(1 + \frac{\exp(-2h\delta_0/\tau_{\perp}) (\exp(-2hN\delta_0/\tau_{\perp}) - 1)}{\exp(-2h\delta_0/\tau_{\perp}) - 1}\right), N \rightarrow \infty. \quad (4.10)$$

Враховуючи, що $N \rightarrow \infty$, отримаємо

$$n = \frac{2\pi m_e^2 V_0 \hbar \omega_0}{(2\pi \hbar)^3} h \sqrt{2\pi\tau_{\parallel}} \left(\frac{\exp(-h\delta_0/\tau_{\perp})}{1 - \exp(-2h\delta_0/\tau_{\perp})}\right). \quad (4.11)$$

Звідси,

$$\alpha = \sqrt{2\pi\tau_{\parallel}} \left(\frac{\exp(-h\delta_0/\tau_{\perp})}{1 - \exp(-2h\delta_0/\tau_{\perp})}\right). \quad (4.12)$$

Перевіримо отриманий вираз для густини електронів в зовнішньому однорідному магнітному полі, порівнявши із випадком без магнітного поля. Для цього виконаємо граничний перехід $H \rightarrow 0$ ($\hbar \rightarrow 0$).

$$n = \frac{2\pi m_e^2 V_0 \hbar \omega_0}{(2\pi \hbar)^3} h \sqrt{2\pi \tau_{\parallel}} \left(1 - \frac{h\delta_0}{\tau_{\perp}} + \dots \right) \left(1 - \left(1 - \frac{2h\delta_0}{\tau_{\perp}} + \dots \right) \right)^{-1}.$$

З точністю до перших членів по h

$$n \approx \frac{(m_e V_0)^3}{(2\pi \hbar)^3} 2\pi \tau_{\perp} \sqrt{2\pi \tau_{\parallel}}. \quad (4.13)$$

Отриманий результат (4.13) відповідає випадку без магнітного поля з ізотропним (3.14) та анізотропним (3.38) розподілами електронів за швидкостями .

Запишемо вираз для діелектричної сприйнятливості з врахуванням наступного співвідношення

$$\left[\frac{2\pi m_e^2 V_0 \hbar \omega_0}{(2\pi \hbar)^3} h \right] = \frac{n}{\alpha}, \quad (4.14)$$

$$\kappa(\vec{k}, \omega) = -\frac{1}{8\pi} \frac{\omega_P^2}{\omega_0^2} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\delta_0} \frac{1}{q^2} \sum_{\nu, \nu'} \Lambda_{\nu\nu'} \left(q_t \sqrt{\delta_0 \hbar^{-1}} \right) \times \quad (4.15)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dr_z \frac{n_{\nu r_z} - n_{\nu', r_z - q_z}}{q_z r_z - \delta_0 q_z^2 + h(\nu - \nu') - \omega - i0},$$

де

$$\omega_P^2 = \frac{4\pi e^2 n}{m_e}, \quad (4.16)$$

а густина електронів n визначається виразом (4.5).

4.2.3. Інтегрування по змінній p_z

Інтегрування в рівнянні (4.2) по змінній p_z проводиться аналогічно до випадку без магнітного поля в розділі 3.

$$\kappa(\vec{k}, \omega) = -\frac{1}{8} \frac{1}{\delta_0} \frac{1}{q^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_{\parallel}}} \frac{1}{q^2 q_z} [1 - \exp(-\beta)] \sum_{\nu, \nu'} \Lambda_{\nu\nu'}(a) \times \quad (4.17)$$

$$[\exp(-\beta\nu) \exp(-\xi_{1h}^2) \{i - \operatorname{erfi}(\xi_{1h})\} - \exp(-\beta\nu') \exp(-\xi_{2h}^2) \{i - \operatorname{erfi}(\xi_{2h})\}],$$

де

$$\xi_{jh} = \xi_j - \xi_h = \frac{(w + (-1)^{j-1} \delta_0 q_z^2)}{q_z \sqrt{2} (\tau_{\parallel})} - \frac{h(\nu - \nu')}{q_z \sqrt{2} (\tau_{\parallel})}, \quad j = 0, 1; \quad (4.18)$$

$$\beta = \frac{2h\delta_0}{\tau_{\perp}} = \frac{\hbar\omega_H}{T_{e\perp}}; \quad (4.19)$$

$$a = q_t \sqrt{\delta_0 h^{-1}} = \frac{\hbar k_t}{\sqrt{2m_e \hbar \omega_h}}. \quad (4.20)$$

4.2.4. Спецфункція $\Lambda_{\nu,\nu'}(a)$

Рекурентне співвідношення

Розглянемо спецфункцію $\Lambda_{\nu,\nu'}$.

$$\Lambda_{\nu,\nu'}(a) = \int_0^{\infty} ds \exp(-s) J_0(2a\sqrt{s}) L_{\nu}(s) L_{\nu'}(s). \quad (4.21)$$

Знайдемо для неї рекурентне співвідношення. Для цього використаємо рекурентне співвідношення для поліномів Лагера $L_{\nu}(s)$ [93]

$$\nu L_{\nu}(s) = (2\nu - 1 - s)L_{\nu-1}(s) - (\nu - 1)L_{\nu-2}(s). \quad (4.22)$$

Тоді

$$\Lambda_{\nu,\nu'} = \frac{1}{\nu} [2(\nu - \nu' - 1)\Lambda_{\nu-1,\nu'} - (\nu - 1)\Lambda_{\nu-2,\nu'} + (\nu' + 1)\Lambda_{\nu-1,\nu'+1} + \nu'\Lambda_{\nu-1,\nu'-1}]. \quad (4.23)$$

Скористаємося властивістю симетричності спецфункції $\Lambda_{\nu,\nu'}$ щодо перестановки індексів місцями

$$\Lambda_{\nu,\nu'} = \frac{1}{\nu'} [2(\nu' - \nu - 1)\Lambda_{\nu,\nu'-1} - (\nu' - 1)\Lambda_{\nu,\nu'-2} + (\nu + 1)\Lambda_{\nu+1,\nu'-1} + \nu\Lambda_{\nu-1,\nu'-1}]. \quad (4.24)$$

На рис. 4.1 зображено рекурентне співвідношення функції $\Lambda_{\nu, \nu'}$

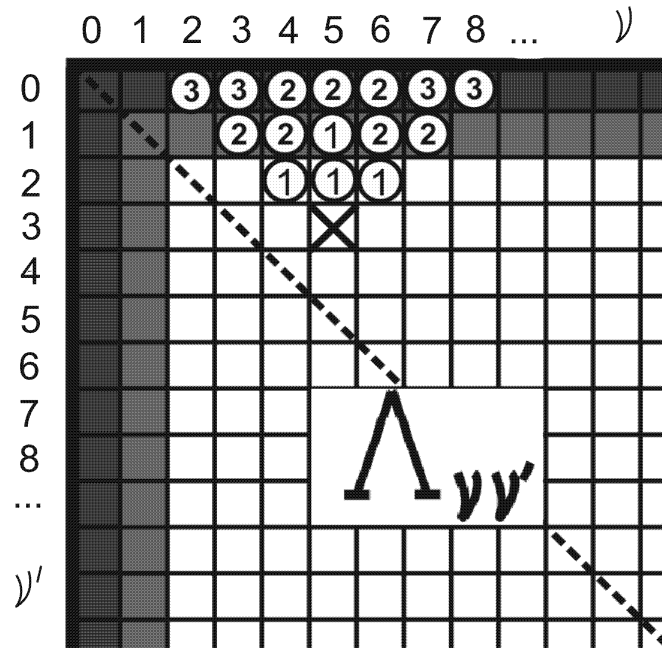


Рис. 4.1. Графічне відображення рекурентного співвідношення функції $\Lambda_{\nu, \nu'}$.

Пунктирна лінія показує симетричність функції $\Lambda_{\nu, \nu'}$ відносно перестановки індексів ν, ν' . Щоб знайти значення $\Lambda_{\nu, \nu'}$, необхідно попередньо знайти $\sum_{n=1}^{\nu'} (2n + 1)$ попередніх значень спецфункції з відповідними індексами.

Явний вигляд спецфункції $\Lambda_{\nu, \nu'}$.

Для того, щоб знайти явний вигляд спецфункції $\Lambda_{\nu, \nu'}$ скористаємося рекурентним співвідношенням для $\Lambda_{\nu, \nu'}$ (4.24) та розв'язком Ханкеля для першого експоненціального інтегралу Вебера [94]

$$\int_0^{\infty} J_{\nu}(at) \exp(-p^2 t^2) \cdot t^{\mu-1} dt = \quad (4.25)$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\frac{a}{p}\right)^{\nu}}{2p^{\mu}\Gamma(\nu + 1)} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu; \nu + 1; -\frac{a^2}{4p^2}\right), \quad \Re(\mu + \nu) > 0,$$

де

$${}_pF_q(a_1, a_2, \dots, a_p; \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \dots (a_p)_n}{n! (\rho_1)_n (\rho_2)_n \dots (\rho_q)_n} z^n \quad (4.26)$$

узагальнений гіпергеометричний ряд, зокрема

$${}_1F_1(a, \rho, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n! (\rho)_n} z^n,$$

де

$$(a)_n = a(a+1)(a+2) \dots (a+n-1), \quad (a)_0 = 1.$$

Використовуючи вирази (4.24), (4.25) та проводячи деякі нескладні розрахунки, отримаємо

$$\Lambda_{\nu, \nu'}(a) = \frac{1}{\nu!} \frac{1}{\nu'!} a^{2(\nu-\nu')} \exp(-a^2) f_{\nu'}(a, \nu) \quad (4.27)$$

$$f_{\nu'}(a, \nu) = [a^2 - x_1^2(\nu)]^2 [a^2 - x_2^2(\nu)]^2 \dots [a^2 - x_{\nu'}^2(\nu)]^2, \quad \nu \geq \nu'.$$

Так, зокрема,

$$f_0(a, \nu) = 1. \quad (4.28)$$

Наведемо для прикладу перші кілька значень спецфункції $\Lambda_{\nu, \nu'}(a)$.

$$\Lambda_{0,\nu} = \frac{1}{\nu!} a^{2\nu} \exp(-a^2). \quad (4.29)$$

$$\Lambda_{1,\nu} = \frac{1}{a^2} \Lambda_{0,\nu} [a^2 - x^2]^2, \quad x = \sqrt{\nu}. \quad (4.30)$$

$$\Lambda_{2,\nu} = \Lambda_{0,\nu} \frac{(a^2 - x_1^2)^2 (a^2 - x_2^2)^2}{2a^4}, \quad x_{1,2}^2 = \nu \pm \sqrt{\nu}. \quad (4.31)$$

$$\Lambda_{3,\nu} = \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{1}{a^6} \Lambda_{0,\nu} [a^2 - x_1^2]^2 [a^2 - x_2^2]^2 [a^2 - x_3^2]^2, \quad (4.32)$$

де

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{\nu + 2\sqrt{\nu} \cos\left(\frac{\arctan(\sqrt{\nu-1})}{3}\right)}, \\ x_2 &= \sqrt{\nu + 2\sqrt{\nu} \cos\left(\frac{\arctan(\sqrt{\nu-1})}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)}, \\ x_3 &= \sqrt{\nu + 2\sqrt{\nu} \cos\left(\frac{\arctan(\sqrt{\nu-1})}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\Lambda_{4,\nu} = \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{1}{a^6} \Lambda_{0,\nu} [a^2 - x_1^2]^2 [a^2 - x_2^2]^2 [a^2 - x_3^2]^2 [a^2 - x_4^2]^2, \quad (4.34)$$

де

$$x_{1,2}^2 = y_{1,2} = \nu' - \sqrt{\left(\nu' + \frac{\xi_0}{2}\right) \pm \sqrt{D_{1,2}}}, \quad (4.35)$$

$$x_{3,4}^2 = y_{3,4} = \nu' + \sqrt{\left(\nu' + \frac{\xi_0}{2}\right) \pm \sqrt{D_{3,4}}}, \quad (4.36)$$

$$\xi_0 = 2\sqrt{2}\sqrt{\nu'(\nu' - 1)} \cos\left(\frac{\arctan\left[\frac{\sqrt{\nu'-2}}{\sqrt{\nu'}}\right]}{3}\right),$$

$$D_{1,2} = 2\nu' - \frac{\xi_0}{2} - 2\nu' \frac{1}{\sqrt{\nu' + \xi_0/2}},$$

$$D_{3,4} = 2\nu' - \frac{\xi_0}{2} + 2\nu' \frac{1}{\sqrt{\nu' + \xi_0/2}}.$$

Розкриваючи дужки в (4.27) та групуючи доданки, запишемо

$$\Lambda_{\nu,\nu'}(a) = \frac{1}{\nu!} \frac{1}{\nu'!} a^{2(\nu-\nu')} \exp(-a^2) \left[\sum_{m=0}^{\nu'} \frac{(-1)^m \nu'! \nu!}{(\nu' - m)! (\nu - m)! m!} a^{2(\nu'-m)} \right]^2, \quad \nu \geq \nu'. \quad (4.37)$$

Квадрат суми рівний

$$\left(\sum_{m=0}^{\nu'} x_m \right)^2 = \sum_{m=0}^{\nu'} \sum_{n=0}^{\nu'} x_m x_n. \quad (4.38)$$

В нашому випадку $x_m = C_m^{\nu, \nu'} a^{2(\nu' - m)}$, де

$$C_m^{\nu, \nu'} = (-1)^m \frac{\nu! \nu!}{(\nu - m)! (\nu' - m) m!}. \quad (4.39)$$

Тоді

$$\left(\sum_{m=0}^{\nu'} C_m^{\nu, \nu'} a^{2(\nu' - m)} \right)^2 = \sum_{m=0}^{\nu'} \sum_{n=0}^{\nu'} C_m^{\nu, \nu'} C_n^{\nu, \nu'} a^{2(2\nu' - m - n)}. \quad (4.40)$$

Коефіцієнт запишемо в дещо іншому вигляді, ввівши різниці $s = \nu - \nu'$, $r = \nu' - m$ та $q = \nu' - n$.

$$C_m^{\nu' + s, \nu'} \rightarrow C_r^{\nu' + s, \nu'} = (-1)^m \frac{(\nu' + s)! \nu!}{(s + r)! (r)! (\nu' - r)!}. \quad (4.41)$$

Аналогічно для $C_n^{\nu, \nu'}$

$$C_n^{\nu' + s, \nu'} \rightarrow C_q^{\nu' + s, \nu'} = (-1)^m \frac{(\nu' + s)! \nu!}{(s + q)! (q)! (\nu' - q)!}. \quad (4.42)$$

Звідси

$$\sum_{m=0}^{\nu'} \sum_{n=0}^{\nu'} C_m^{\nu, \nu'} C_n^{\nu, \nu'} a^{2(2\nu' - m - n)} = \sum_{r=0}^{\nu'} C_r^{\nu, \nu'} a^{2r} \sum_{q=0}^{\nu'} C_q^{\nu, \nu'} a^{2q}. \quad (4.43)$$

Перепишемо суму $\sum_{r=0}^{\nu'} C_r^{\nu, \nu'} a^{2r}$ через поліном Лагера. Одним із визначень полінома Лагера є вираз [95]

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n+\alpha}{n-m} \frac{x^m}{m!}, \quad (4.44)$$

де $\binom{n+\alpha}{n-m}$ — біномінальний коефіцієнт, який визначений як

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{-(1)^k (-n)_k}{k!}. \quad (4.45)$$

$$(a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1), \quad k = 1, 2, 3, \dots; \quad a_0 = 1 \quad (4.46)$$

символ Похгаммера.

Із визначення для полінома Лагера (4.44) отримуємо

$$\sum_{r=0}^{\nu'} C_r^{\nu'+s, \nu'} a^{2r} = \nu'! L_{\nu'}^s(a^2), \quad (4.47)$$

Аналогічно і друга сума

$$\sum_{q=0}^{\nu'} C_q^{\nu'+s, \nu'} a^{2q} = \nu'! L_{\nu'}^s(a^2), \quad (4.48)$$

Звідси, для $\Lambda_{\nu, \nu'}(a)$ маємо

$$\Lambda_{\nu, \nu'}(a) = \frac{\nu'!}{(\nu' + s)!} a^{2s} \exp(-a^2) L_{\nu'}^s(a^2) L_{\nu'}^s(a^2), \quad \nu \geq \nu', \quad s = \nu - \nu'. \quad (4.49)$$

Для випадку $\nu' \geq \nu$ скористаємося властивістю симетричності для функції $\Lambda_{\nu, \nu'}(a)$ відносно перестановки індексів ν, ν'

$$\Lambda_{\nu, \nu'}(a) = \frac{\nu!}{(\nu + s)!} a^{2s} \exp(-a^2) L_{\nu}^s(a^2) L_{\nu}^s(a^2), \quad \nu' \geq \nu, \quad s = \nu' - \nu. \quad (4.50)$$

Наближення великих значень аргументу $a^2 \gg 1$

Наближення $a^2 \gg 1$ справедливе у випадку слабких магнітних полів. Скористаємося асимптотичним наближенням для поліномів Лагерра на відріжку $0 \leq s \leq a$, де a — довільне кінечне число [96]

$$\exp\left(-\frac{s}{2}\right) L_{\nu}(s) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} J_0\left(2\sqrt{s(\nu + 1/2)}\right) + O(\nu^{-3/4}). \quad (4.51)$$

$$\Lambda_{\nu, \nu'}\left(qt \frac{\sqrt{\delta_0}}{\sqrt{h}}\right) = \int_0^{\infty} ds J_0\left(2qt \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{h}} \sqrt{s}\right) J_0\left(2\sqrt{s(\nu + 1/2)}\right) J_0\left(2\sqrt{s(\nu' + 1/2)}\right), \quad (4.52)$$


Виконаємо заміну змінної інтегрування

$$\begin{aligned} 2\frac{\sqrt{\delta_0}}{\sqrt{h}}\sqrt{s} &= \rho, & \sqrt{s} &= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{\delta_0}}\rho, \\ ds &= \sqrt{s}\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{\delta_0}}d\rho, & ds &= \frac{1}{2}\frac{h}{\delta_0}\rho d\rho. \end{aligned} \quad (4.53)$$

В нових змінних рівняння (4.21) запишеться

$$\Lambda_{\nu,\nu'}\left(qt\frac{\sqrt{\delta_0}}{\sqrt{h}}\right) = \frac{1}{2}\frac{h}{\delta_0}\int_0^\infty \rho d\rho J_0(qt\rho)J_0(r_t\rho)J_0(r'_t\rho), \quad (4.54)$$

де $r_t = \sqrt{h\delta_0^{-1}(\nu + 1/2)}$; $r'_t = \sqrt{h\delta_0^{-1}(\nu' + 1/2)}$.

Використаємо розв'язок  для узагальнених інтегралів Вебера-Шафхейтліна, запропонований в роботі [94]

$$\int_0^\infty J_\lambda(at)J_\lambda(bt)J_\lambda(ct)\frac{dt}{t^{\lambda-1}} = \frac{2^{\lambda-1}\Delta^{2\lambda-1}}{(abc)^\lambda\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}, \quad (4.55)$$

де Δ — площа трикутника зі сторонами a , b , і c . Якщо a , b , і c не є сторонами трикутника, то інтеграл рівний 0,

Положимо $\lambda = 0$, тоді

$$\int_0^\infty J_0(at)J_0(bt)J_0(ct)t dt = \frac{1}{2}\frac{1}{\Delta_{abc}}\frac{1}{\pi}, \quad (4.56)$$

і, відповідно, запишемо для $\Lambda_{\nu,\nu'}(a)$

$$\Lambda_{\nu,\nu'} \left(q_t \frac{\sqrt{\delta_0}}{\sqrt{h}} \right) = \frac{1}{4} \frac{h}{\delta_0} \frac{1}{\Delta_{q_t, r_t, r'_t}} \frac{1}{\pi}. \quad (4.57)$$

У випадку, коли імпульси $\hbar q_t, r_t, r'_t$ не утворюють трикутника, то $\Lambda_{\nu,\nu'}(a)$ приймає значення 0.

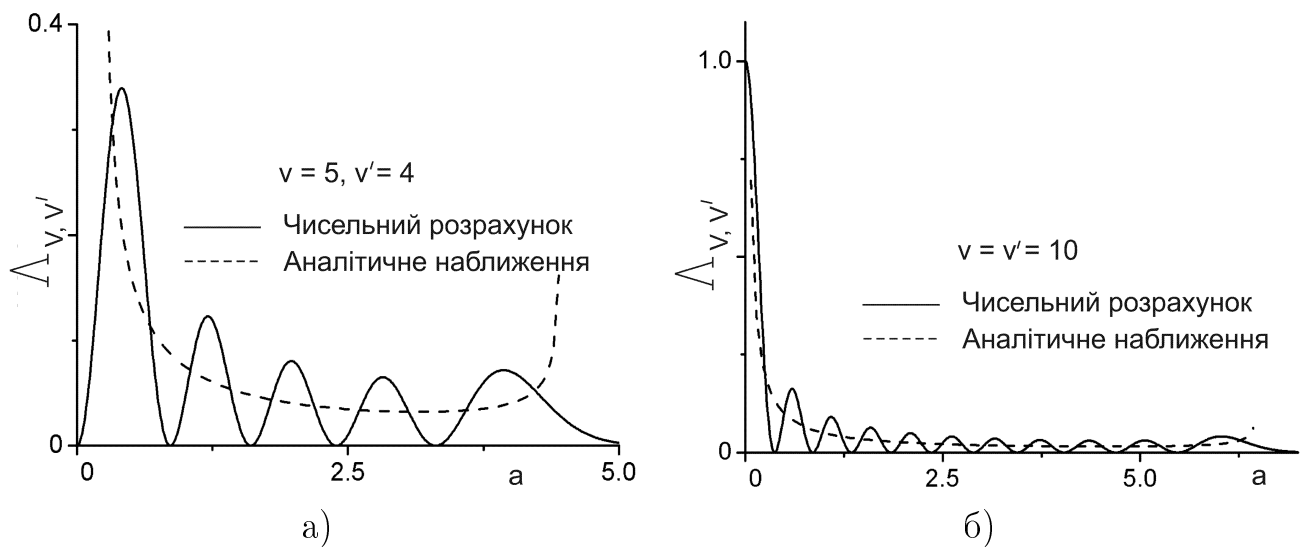


Рис. 4.2. Залежність $\Lambda_{\nu,\nu'}$ від аргумента a . а) $\nu = 5, \nu' = 5$ б) $\nu = \nu' = 10$. Пунктирна лінія — аналітичний результат, суцільна лінія — чисельний розрахунок.

На рис. 4.2 представлено графічне зображення $\Lambda_{\nu,\nu'}(a)$ - функції для рівнів Ландау: а) $\nu = 5, \nu' = 5$; б) $\nu = \nu' = 10$. Суцільна лінія відповідає прямому чисельному розрахунку $\Lambda_{\nu,\nu'}(a)$ - функції, пунктирна — аналітичний результат, рівняння (4.57). Відзначимо, що при $a^2 \rightarrow 0$

$$\Lambda_{\nu,\nu'}(a) \begin{cases} 1, & \nu = \nu' \\ 0, & \nu \neq \nu'. \end{cases} \quad (4.58)$$

Випадок $a^2 \ll 1$ детально розглянуто в роботах [82, 86].

4.2.5. Сумування діелектричної сприйнятливості по ν

Розглянемо випадок, коли $\nu \leq \nu'$. Тоді уявну частину діелектричної проникності запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \text{Im}\kappa(\vec{k}, \omega) = & -\frac{1}{8} \frac{(1 - \exp(-\beta))}{q^2 q_z \delta_0 \sqrt{2\pi\tau_{\parallel}}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\nu'=\nu}^{\infty} \Lambda_{\nu\nu'}(a) \times \\ & [\exp(-\beta\nu) \exp(-(\xi_1 - \xi_h)^2) - \exp(-\beta\nu') \exp(-(\xi_2 - \xi_h)^2)]. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Винесемо частину експоненти за дужки

$$\begin{aligned} \text{Im}\kappa(\vec{k}, \omega) = & -\frac{1}{8} \frac{(1 - \exp(-\beta))}{q^2 q_z \delta_0 \sqrt{2\pi\tau_{\parallel}}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\nu'=\nu}^{\infty} \Lambda_{\nu\nu'}(a) \exp\left(-\beta \frac{(\nu + \nu')}{2}\right) \times \\ & \left[\exp\left(\frac{\beta}{2}(\nu' - \nu)\right) \exp(-(\xi_1 - \xi_h)^2) - \exp\left(-\frac{\beta}{2}(\nu' - \nu)\right) \exp(-(\xi_2 - \xi_h)^2) \right]. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Діелектрична сприйнятливість залежить від суми та різниці індексів сумування, рівнів Ландау, $\nu' - \nu = s$. Тому зручніше для подальших розрахунків буде перейти від $\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\nu'=\nu}^{\infty}$ до $\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty}$. При цьому слід врахувати, що

$$\xi_h = \frac{h(\nu - \nu')}{\sqrt{2}(\tau_{\parallel})} \rightarrow -\xi_{hs}.$$

$$\text{Im}\kappa(\vec{k}, \omega) = -\frac{1}{8} \frac{(1 - \exp(-\beta))}{q^2 q_z \delta_0 \sqrt{2\pi\tau_{\parallel}}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \Lambda_{\nu,s}(a) \exp(-\beta\nu) \exp\left(-s\frac{\beta}{2}\right) \times \quad (4.61)$$

$$\left[\exp\left(s\frac{\beta}{2}\right) \exp(-(\xi_1 + \xi_{hs})^2) - \exp\left(-s\frac{\beta}{2}\right) \exp(-(\xi_2 + \xi_{hs})^2) \right].$$

Проведемо аналогічні міркування, щодо іншої частини суми. Розглянемо тепер випадок, коли $\nu \geq \nu'$. Уявну частину діелектричної сприйнятливості запишемо як

$$\text{Im}\kappa(\vec{k}, \omega) = -\frac{1}{8} \frac{(1 - \exp(-\beta))}{q^2 q_z \delta_0 \sqrt{2\pi\tau_{\parallel}}} \sum_{\nu'=0}^{\infty} \sum_{\nu=\nu'}^{\infty} \Lambda_{\nu\nu'}(a) \times \quad (4.62)$$

$$\left[\exp(-\beta\nu) \exp(-(\xi_1 - \xi_h)^2) - \exp(-\beta\nu') \exp(-(\xi_2 - \xi_h)^2) \right].$$

Винесемо частину експоненти за дужки

$$\text{Im}\kappa(\vec{k}, \omega) = -\frac{1}{8} \frac{(1 - \exp(-\beta))}{q^2 q_z \delta_0 \sqrt{2\pi\tau_{\parallel}}} \sum_{\nu'=0}^{\infty} \sum_{\nu=\nu'}^{\infty} \Lambda_{\nu\nu'}(a) \exp\left(-\beta\frac{(\nu + \nu')}{2}\right) \times \quad (4.63)$$

$$\left[\exp(-\beta(\nu - \nu')) \exp(-(\xi_1 - \xi_h)^2) - \exp(\beta(\nu - \nu')) \exp(-(\xi_2 - \xi_h)^2) \right].$$

Для подальших розрахунків перейдемо від $\sum_{\nu'=0}^{\infty} \sum_{\nu=\nu'}^{\infty}$ до $\sum_{\nu'=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty}$

$$\begin{aligned} \text{Im}\kappa(\vec{k}, \omega) = & -\frac{1}{8} \frac{(1 - \exp(-\beta))}{q^2 q_z \delta_0 \sqrt{2\pi\tau_{\parallel}}} \sum_{\nu'=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \Lambda_{\nu',s}(a) \exp(-\beta\nu') \exp\left(-s\frac{\beta}{2}\right) \times \\ & \left[\exp\left(-s\frac{\beta}{2}\right) \exp(-(\xi_1 - \xi_{hs})^2) - \exp\left(s\frac{\beta}{2}\right) \exp(-(\xi_2 - \xi_{hs})^2) \right]. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Аналогічні міркування справедливі і для дійсної частини діелектричної сприйнятливості. Щоб знайти повний вираз для уявної частини поляризаційного оператора необхідно просумувати вирази (4.61) та (4.64) і відняти суму діагональних елементів, оскільки остання враховувалася попередньо в обох випадках, коли $\nu = \nu'$.

$$\begin{aligned} \text{Im}\kappa(\vec{k}, \omega)_{\nu,s} = & -\frac{1}{8} \frac{(1 - \exp(-\beta))}{q^2 q_z \delta_0 \sqrt{2\pi\tau_{\parallel}}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \Lambda_{\nu,s}(a) \exp\{-\beta\nu\} \exp\left\{-\frac{s\beta}{2}\right\} \times \\ & \left[\exp\left\{\frac{s\beta}{2}\right\} \left(\exp\left\{-(\xi_1 + \xi_{hs})^2\right\} - \exp\left\{-(\xi_2 - \xi_{hs})^2\right\} \right) + \right. \\ & \left. + \exp\left\{-\frac{s\beta}{2}\right\} \left(\exp\left\{-(\xi_1 - \xi_{hs})^2\right\} - \exp\left\{-(\xi_2 + \xi_{hs})^2\right\} \right) \right] - \\ & + \frac{1}{8} \frac{(1 - \exp(-\beta))}{q^2 q_z \delta_0 \sqrt{2\pi\tau_{\parallel}}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Lambda_{\nu,s=0}(a) \exp\{-\beta\nu\} \left[\exp\{-\xi_1^2\} - \exp\{-\xi_2^2\} \right]. \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned}
\text{Re}k(\vec{k}, \omega)_{\nu,s} = & \frac{1}{8} \frac{(1 - \exp(-\beta))}{q^2 q_z \delta_0 \sqrt{2\pi\tau_{\parallel}}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \Lambda_{\nu,s}(a) \exp(-\beta\nu) \exp\left\{-\frac{s\beta}{2}\right\} \times \\
& \left\{ \exp\left\{\frac{s\beta}{2}\right\} \times \right. \\
& \left[\exp\left\{-\left(\xi_1 + \xi_{hs}\right)^2\right\} \text{erfi}\left(\xi_1 + \xi_{hs}\right) - \exp\left\{-\left(\xi_2 - \xi_{hs}\right)^2\right\} \text{erfi}\left(\xi_2 - \xi_{hs}\right) \right] + \\
& \left. \exp\left\{-\frac{s\beta}{2}\right\} \times \right. \\
& \left. \left[\exp\left\{-\left(\xi_1 - \xi_{hs}\right)^2\right\} \text{erfi}\left(\xi_1 - \xi_{hs}\right) - \exp\left\{-\left(\xi_2 + \xi_{hs}\right)^2\right\} \text{erfi}\left(\xi_2 + \xi_{hs}\right) \right] \right\} + \\
& - \frac{1}{8} \frac{(1 - \exp(-\beta))}{q^2 q_z \delta_0 \sqrt{2\pi\tau_{\parallel}}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Lambda_{\nu,s=0}(a) \exp(-\beta\nu) \left[e^{(-\xi_1^2)} \text{erfi}\left(\xi_1\right) - e^{(-\xi_2^2)} \text{erfi}\left(\xi_2\right) \right].
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Проведемо аналіз суми

$$G_s = [1 - \exp(-\beta)] \exp\left\{-\frac{s\beta}{2}\right\} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Lambda_{\nu,s}(a) \exp\{-\beta\nu\}. \tag{4.67}$$

Використаємо загальний розв'язок для $\Lambda_{\nu,\nu'}(a)$ - функції (4.50)

$$\begin{aligned}
G_s = & [1 - \exp(-\beta)] a^{2s} \exp(-a^2) \exp\left\{-\frac{s\beta}{2}\right\} \times \\
& \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu!}{(\nu + s)!} L_{\nu}^s(a^2) L_{\nu}^s(a^2) \exp\{-\beta\nu\}.
\end{aligned} \tag{4.68}$$



Суму по ν знайдемо за допомогою рівняння з роботи [93]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma(n + \alpha + 1)} L_n^\alpha(x) L_n^\alpha(y) z^n = \frac{(xyz)^{-\frac{1}{2}\alpha}}{1-z} \exp\left(-z \frac{x+y}{1-z}\right) I_\alpha\left(2 \frac{\sqrt{xyz}}{1-z}\right), \quad (4.69)$$

$$|z| < 1, \quad \alpha > -1.$$

В нашому випадку $z = \exp(-\beta)$, $\alpha = s$, $y = x = a^2$.

$$G_s = I_s\left(2a^2 \frac{\exp(-\beta/2)}{1 - \exp(-\beta)}\right) \exp\left(-a^2 \frac{1 + \exp(-\beta)}{1 - \exp(-\beta)}\right). \quad (4.70)$$

Підставимо знайдений вираз (4.70) в рівняння (4.65) і (4.66)

$$\begin{aligned} \text{Im}\kappa(\vec{k}, \omega)_s = & -\frac{1}{8} \frac{1}{q^2 q_z \delta_0 \sqrt{2\pi\tau_{\parallel}}} \sum_{s=0}^{\infty} G_s \times \quad (4.71) \\ & \left[\exp\left\{\frac{s\beta}{2}\right\} \left(\exp\left\{-\left(\xi_1 + \xi_{hs}\right)^2\right\} - \exp\left\{-\left(\xi_2 - \xi_{hs}\right)^2\right\} \right) + \right. \\ & \left. + \exp\left\{-\frac{s\beta}{2}\right\} \left(\exp\left\{-\left(\xi_1 - \xi_{hs}\right)^2\right\} - \exp\left\{-\left(\xi_2 + \xi_{hs}\right)^2\right\} \right) \right] - \\ & + \frac{1}{8} \frac{1}{q^2 q_z \delta_0 \sqrt{2\pi\tau_{\parallel}}} \exp\left(-a^2 \frac{1 + \exp(-\beta)}{1 - \exp(-\beta)}\right) G_0 \\ & \left[\exp\left\{-\xi_1^2\right\} - \exp\left\{-\xi_2^2\right\} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\kappa(\vec{k}, \omega)_s &= \frac{1}{8} \frac{1}{q^2 q_z \delta_0 \sqrt{2\pi\tau_{\parallel}}} \sum_{s=0}^{\infty} G_s \times \\
&\quad \left\{ \exp\{s\beta/2\} \times \right. \\
&\quad \left[\exp\left\{-\left(\xi_1 + \xi_{hs}\right)^2\right\} \operatorname{erfi}\left(\xi_1 + \xi_{hs}\right) - \exp\left\{-\left(\xi_2 - \xi_{hs}\right)^2\right\} \operatorname{erfi}\left(\xi_2 - \xi_{hs}\right)\right] + \\
&\quad \left. \exp\{-s\beta/2\} \times \right. \\
&\quad \left. \left[\exp\left\{-\left(\xi_1 - \xi_{hs}\right)^2\right\} \operatorname{erfi}\left(\xi_1 - \xi_{hs}\right) - \exp\left\{-\left(\xi_2 + \xi_{hs}\right)^2\right\} \operatorname{erfi}\left(\xi_2 + \xi_{hs}\right)\right] \right\} + \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{1}{q^2 q_z \delta_0 \sqrt{2\pi\tau_{\parallel}}} \exp\left(-a^2 \frac{1 + \exp(-\beta)}{1 - \exp(-\beta)}\right) G_0 \times \\
&\quad \left[e^{(-\xi_1^2)} \operatorname{erfi}(\xi_1) - e^{(-\xi_2^2)} \operatorname{erfi}(\xi_2) \right].
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Об'єднаємо доданки суми, скориставшись властивістю модифікованих функцій бесселя першого роду з цілими значенням порядку функції [93]

$$I_{\nu}(z) = I_{-\nu}(z), \quad \nu \in Z. \tag{4.73}$$

Звідси,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\kappa(\vec{k}, \omega)_s &= -\frac{1}{8} \frac{1}{q^2 q_z \delta_0 \sqrt{2\pi\tau_{\parallel}}} \times \\
&\quad \exp\left(-a^2 \frac{1 + \exp(-\beta)}{1 - \exp(-\beta)}\right) \sum_{s=-\infty}^{\infty} I_s\left(2a^2 \frac{\exp(-\beta/2)}{1 - \exp(-\beta)}\right) \times \\
&\quad \exp\left\{\frac{-s\beta}{2}\right\} \left(\exp\left\{-\left(\xi_1 + \xi_{hs}\right)^2\right\} - \exp\left\{-\left(\xi_2 - \xi_{hs}\right)^2\right\} \right).
\end{aligned} \tag{4.74}$$

$$\operatorname{Re}\kappa(\vec{k}, \omega)_s = \frac{1}{8} \frac{1}{q^2 q_z \delta_0 \sqrt{2\pi\tau_{\parallel}}} \times \quad (4.75)$$

$$\exp\left(-a^2 \frac{1 + \exp(-\beta)}{1 - \exp(-\beta)}\right) \sum_{s=-\infty}^{\infty} I_s \left(2a^2 \frac{\exp(-\beta/2)}{1 - \exp(-\beta)}\right) \exp\left\{-\frac{s\beta}{2}\right\} \times$$

$$\left[\exp\left\{-\left(\xi_1 + \xi_{hs}\right)^2\right\} \operatorname{erfi}\left(\xi_1 + \xi_{hs}\right) - \exp\left\{-\left(\xi_2 - \xi_{hs}\right)^2\right\} \operatorname{erfi}\left(\xi_2 - \xi_{hs}\right)\right],$$

де β визначається із рівняння (4.19); a — (4.20). Індекс s вказує на те, що у виразі залишилося провести сумування по індексові s — різниці між кінцевим та початковим енергетичними рівнями Ландау електронів.

Рівняння (4.74) і (4.75) є аналітичними виразами для уявної та дійсної частин діелектричної сприйнятливості магнітоактивного електронного газу з анаізотропним розподілом електронів за швидкостями, відповідно. Рівняння (4.74) і (4.75) справедливі для будь-яких значень напруженості магнітного поля і повздовної та поперечної температур електронного газу.

4.3. Гальмівна здатність

4.3.1. Наближення великих швидкостей налітаючої частинки

Важливим питання у вивченні процесу електронного охолодження є врахування температури електронного газу. Входить параметр температури у вираз для енергетичних втрат налітаючої зарядженої частинки у вигляді ε_{α}/T_e

$$\frac{\varepsilon_{\alpha}}{T_e} = \frac{\varepsilon_{\alpha\perp}}{T_e} + \frac{\varepsilon_{\alpha\parallel}}{T_e} = \frac{\omega_H}{T_e} \left(\nu + \frac{1}{2}\right) + \frac{p^2}{2mT_e}. \quad (4.76)$$

Під час електростатичного прискорення пучка заряджених частинок спостерігають так званий ефект "сплющення" функції розподілу за швидкостями. Цей ефект є безпосереднім наслідком з теореми Ліувіля.

Після електростатичного прискорення електронний розподіл за швидкостями суттєво анізотропний. Для типових параметрів електронного кулера поперечна температура в сотні разів перевищує повздовжню компоненту

$$T_{\perp e} \approx T_{cath} \sim 1000K, \quad U \sim 10kV, \quad T_{\parallel} = T_{cath}^2/E \sim 1K$$

Запишемо діелектричну сприйнятливість в лінійному наближенні за температурою [86]

$$\kappa(\omega, k, T) = \kappa(\omega, k, 0) + AT_{\parallel} + BT_{\perp} + C, \quad (4.77)$$

де $\kappa(\omega, k, 0)$ діелектрична сприйнятливість холодного електронного газу

$$\kappa(\omega, k, 0) = -\frac{\omega_P^2}{k^2} \left(\frac{k_z^2}{\omega^2} + \frac{k_{\perp}^2}{\omega^2 - \omega_H^2} \right). \quad (4.78)$$

Вираз (4.78) добре відомий у фізиці плазми [45]

Наступні два доданки у виразі (4.77) враховують повздовжню та поперечну температуру в лінійному наближенні, відповідно

$$A = -\frac{\omega_P^2 k_z^2}{mk^2} \left(\frac{3k_z^2}{\omega^4} + k_{\perp}^2 \frac{3\omega^2 + \omega_H^2}{(\omega^2 - \omega_H^2)^3} \right), \quad (4.79)$$

$$B = -\frac{\omega_P^2 k_{\perp}^2}{mk^2} \left(\frac{k_z^2}{\omega^2} \frac{3\omega^2 - \omega_H^2}{(\omega^2 - \omega^2)^2} + \frac{3k_{\perp}^2}{(\omega^2 - 4\omega_B^2)(\omega^2 - \omega_B^2)} \right). \quad (4.80)$$

Останній доданок враховує квантові поправки [86]

$$C = -\frac{\omega_P^2}{k^2} \left(\frac{\hbar^2 k_z^2}{4m\omega^2} + \frac{\hbar^2 k_\perp^4 k_z^2}{8m^2 \omega^2 \omega_H^2} \left(1 + \frac{3T_\perp}{\hbar\omega_H} \right) \right) - \frac{\omega_P^2}{k^2} \left(\frac{\hbar^2 k_z^4 k_\perp^2}{4m^2} \left(\frac{3\omega^2 + \omega_H^2}{\omega^2 - \omega_H^2} \right) \right). \quad (4.81)$$

Відзначимо, що у випадку сильних магнічних полів в лінійному наближенні за швидкостями в діелектричній сприйнятливості члени порядку до a^2 містять у собі лише повздовжню температуру.

Розглянемо випадок руху налітаючого іона вздовж магнітного поля. У випадку слабких та сильних магнітних полів вдається отримати аналітичні рішення для енергетичних втрат.

У випадку слабого зовнішнього поля ($\omega_H/\omega_P \ll 1$) енергетичні втрати записуються як

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{q^2 \omega_P^2}{V_i} \left[L_C - \frac{\tau}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_H}{\omega_P} \right) \right]. \quad (4.82)$$

де $\tau = \frac{3v_{eT}^2}{V_i^2}$, L_C — Кулонівський логарифм.

Якщо магнітне поле "вимкнути", то отриманий результат переходить у випадок без магнітного поля $\vec{H} = 0$ [80]. Значення кулонівського логарифму ~ 10 . Тому для великих швидкостей налітаючої частинки $v_e/V_i \ll 1$ вклад магнітного поля не суттєвий.

У випадку сильного магнітного поля ($\omega_H/\omega_P \gg 1$)

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{q^2 \omega_P^2}{V_i} \left[\left(1 - \frac{4\tau_{\parallel}}{3} \left(\frac{\omega_H}{\omega_P} \right)^4 - \frac{2\tau_{\perp}}{3} \left(\frac{\omega_H}{\omega_P} \right)^2 \right) L_C - \right. \quad (4.83)$$

$$\left. - \ln \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_H}{\omega_P} \right)^2} \right) + \frac{2\tau_{\parallel}}{3} \left(\frac{\omega_H}{\omega_P} \right)^4 - \frac{\tau_{\perp}}{3} \left(\frac{\omega_H}{\omega_P} \right)^2 \right].$$

Перший доданок дає основний вклад в енергетичні втрати і пропорційний

$$\left(1 - \frac{4\tau_{\parallel}}{3} \left(\frac{\omega_H}{\omega_P} \right)^4 - \frac{2\tau_{\perp}}{3} \left(\frac{\omega_H}{\omega_P} \right)^2 \right). \quad (4.84)$$

Введемо параметр, що рівний відношенню другого та третього додаків в (4.84).

$$\xi = 2 \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} \left(\frac{\omega_H}{\omega_P} \right)^2. \quad (4.85)$$

Експериментально було встановлено, що в електронному охолодженні важких заряджених частинок спостерігався ефект швидкого електронного охолодження [21, 22]. Швидке електронне охолодження спостерігається за присутності сильного зовнішнього поля, що замагнічує поперечну компоненту температури. Тому енергетичні втрати повністю визначаються повздовжньою температурою, яка на кілька порядків менша, за поперечну. Електронне охолодження іонів відбувається краще.

В експерименті [18] параметр ξ був порядку одиниці. На сучасних установках, наприклад, проект HESR (High Energy Storage Ring), $\xi \approx 10$. Вклад від повздовжньої складової теплового руху електронів значно вищий, ніж від поперечної.

4.3.2. Чисельний розрахунок

Ізотропний розподіл

Сильне магнітне поле замагнічує поперечний тепловий рух електронів, тому, виходячи з виразів для діелектричної сприйнятливості, достатньо врахувати при розрахунках вклад від кількох перших рівнів Ландау. Параметром замагніченості будемо вважати вважати величину

$$\beta = \frac{\hbar\omega_H}{T_{\perp}}. \quad (4.86)$$

З рівняння 4.17 бачимо, що при $\beta \geq 1$ кожен наступний член суми по ν або ν' буде в $e^{-\beta}$ разів меншим, за попередній.

На рис. (4.3) представлені чисельні розрахунки гальмівної здатності замагніченого електронного газу для випадків: а) повна замагніченість $\beta \gg 1$; б) часткова замагніченість $\beta \sim 1$. Температура електронного газу ізотропна $T_e = 10^{-3}$ еВ.

На рис. (4.3 а) представлені чисельні розрахунки гальмівної здатності замагніченого електронного газу для випадку повної замагніченості, $\beta \gg 1$. Магнітне поле пригнічує процес передачі енергії між електронним газом та налітаючим іоном. Як результат, втрати енергії зменшились. Таке зменшення суттєве для швидкостей іона порядку та більших за теплову швидкість електронів. Для розрахунку було взято таку напруженість магнітного поля, щоб побачити вплив кожного переходу між рівнями Ландау. У випадку, коли $\omega_H/\omega_P = 10^5$ (абсолютна замагніченість), для розрахунків сили тертя достатньо врахувати лише нульовий перехід (точки), врахування ще одного члена (квадрати) не змінює результату. У випадку, коли $\omega_H/\omega_P = 10^4$, врахувувати потрібно кілька перших членів суми (квадрати — тільки член з індексом 0; круги — члени 0,1; трикутники — члени 0-2; ромби — члени 0-3;

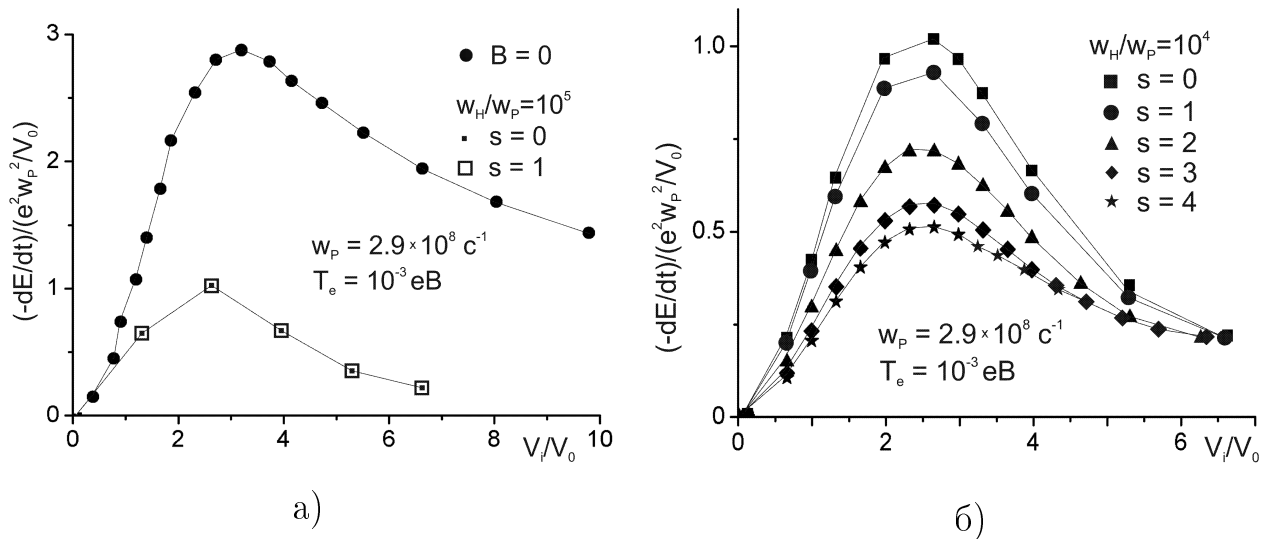


Рис. 4.3. Залежність гальмівної здатності dE/dl від швидкості налітаючого іона для випадків: а) повної замагніченості $\beta \gg 1$ (кружки — без магнітного поля, точки та квадрати — враховуються тільки 0 та 0-1 члени, відповідно для $\omega_H/\omega_P = 10^5$); б) часткової замагніченості $\beta \sim 1$ (квадрати — тільки член з індексом 0; кружки — члени 0,1; трикутники — члени 0-2; ромби — члени 0-3; зірки — члени 0-4 для $\omega_H/\omega_P = 10^4$).

зірки — члени 0-4 для $\omega_H/\omega_P = 10^4$).

Отримані результати у випадку ізотропного розподілу добре узгоджуються з результатами, отриманими в розділі 2 та в роботі [85].

Анізотропний розподіл

Реальний електронний пучок електронів після прискорення має виражений анізотропний розподіл за швидкостями відносно напрямку прискорення, повздовжня температура значно менша за поперечну. Використання в експериментах зовнішнього повздовжнього магнітного поля дає можливість замагнітити поперечний рух електронів, роблячи "ефективну" температуру електронного пучка на кілька порядків менше, ніж у випадку без магнітного поля. Таке поєднання впливів анізотропного розподілу електронів за швидкостями та сильного магнітного поля має сильно змінити процес взаємодії налітаючого іона та електронів.

На рис. 4.4 представлені чисельні розрахунки гальмівної здатності електронного газу з анізотропним розподілом електронів за швидкостями ($T_{\perp} =$

10^{-3} eВ, $T_{\parallel} = 10^{-4}$ eВ) для випадків: квадрати — без магнітного поля, круги — з сильним магнітним полем, $\omega_H/\omega_P = 10^5$.

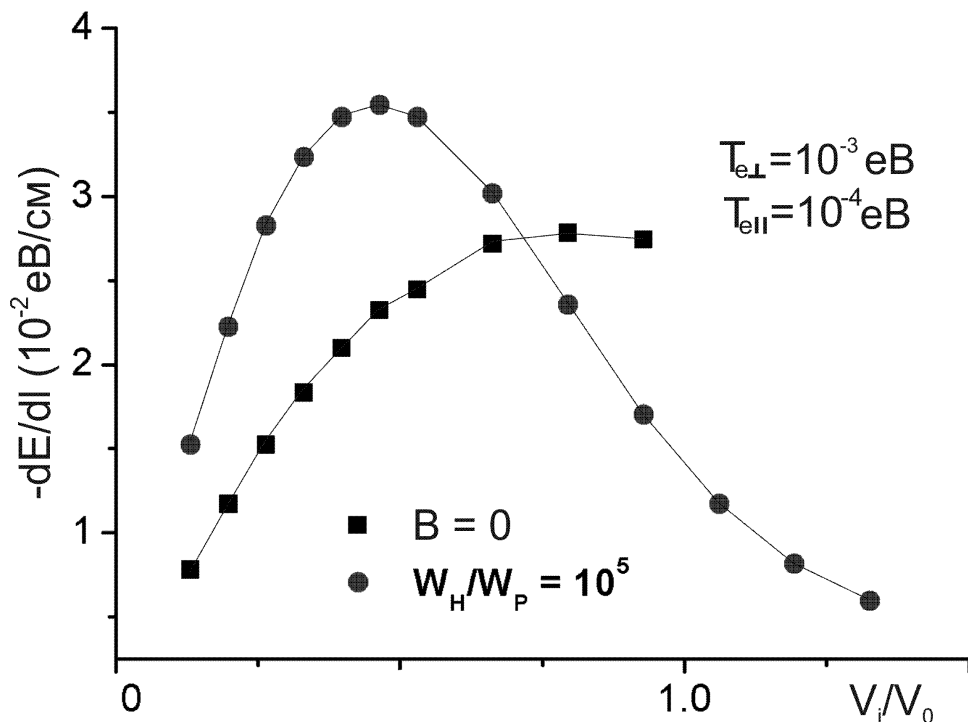


Рис. 4.4. Залежність гальмівної здатності $-dE/dl$ від швидкості налітаючого іона для електронів з анізотропним розподілом за швидкостями ($T_{\perp} = 10^{-3}$ eВ, $T_{\parallel} = 10^{-4}$ eВ): квадрати — без магнітного поля, круги — з сильним магнітним полем, $\omega_H/\omega_P = 10^5$. Швидкість вимірюється в одиницях $V_0 = 10^6$ см/с.

Як показано, на рис. 4.4 при гальмуванні іона електронним газом з анізотропним розподілом електронів за швидкостями магнітне поле підвищує максимальне значення сили тертя. Спостережуваний ефект протилежний до випадку використання електронів з ізотропною температурою. Положення максимуму гальмівної здатності у випадку сильних магнітних полів визначається повздовжньою температурою електронів, поперечна передача енергії подавлена магнітним полем.

На рис. 4.5 представлені чисельні розрахунки гальмівної здатності замагніченого електронного газу з анізотропною температурою: поперечна температура фіксована $T_{\perp} = 10^{-3}$ eВ; повздовжня температура: квадрати —

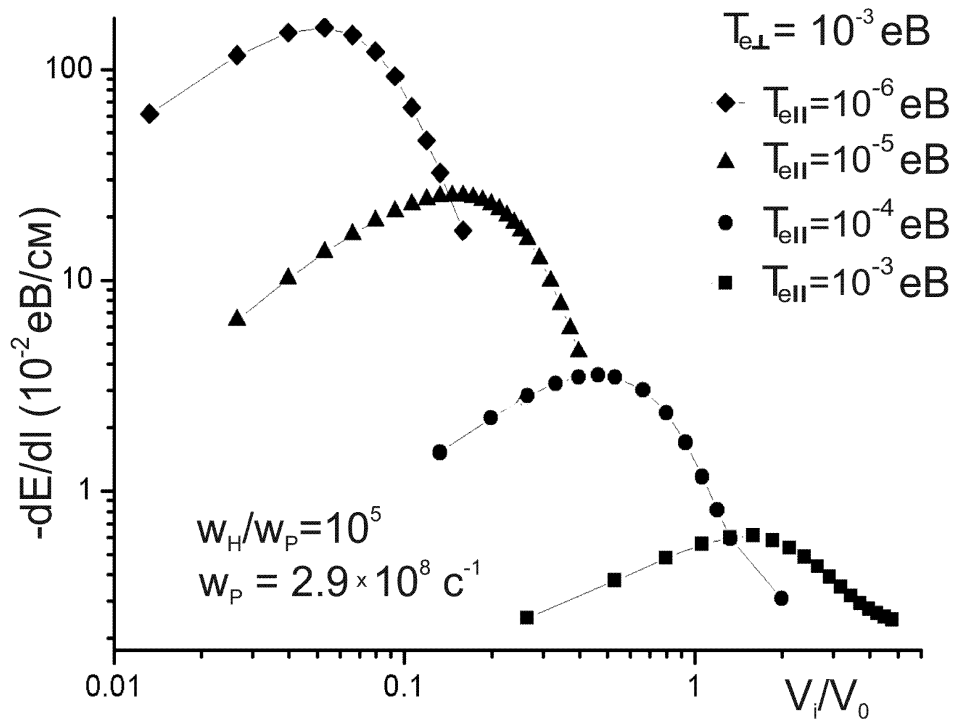


Рис. 4.5. Залежність гальмівної здатності dE/dl від швидкості налітаючого іона у випадку повної замагніченості $\beta \gg 1$ електронного газу з анізотропною температурою, поперечна температура фіксована $T_{\perp} = 10^{-3}$ еВ; повздовжня температура: квадрати — $T_{\parallel} = 10^{-3}$ еВ, круги — $T_{\parallel} = 10^{-4}$ еВ, трикутники — $T_{\parallel} = 10^{-5}$ еВ, ромби — $T_{\parallel} = 10^{-6}$ еВ; відношення циклотронної та плазмової частот $\omega_H/\omega_P = 10^5$. Швидкість вимірюється в одиницях $V_0 = 10^6$ см/с.

$T_{\parallel} = 10^{-3}$ еВ, круги — $T_{\parallel} = 10^{-4}$ еВ, трикутники — $T_{\parallel} = 10^{-5}$ еВ, ромби — $T_{\parallel} = 10^{-6}$ еВ; відношення циклотронної та плазмової частот $\omega_H/\omega_P = 10^5$. Швидкість вимірюється в одиницях $V_0 = 10^6$ см/с.

При зменшенні повздовжньої температури спостерігаємо картину, подібну до випадку без магнітного поля — ріст максимуму гальмівної здатності і його поступове зміщення. Значення повздовжньої теплової швидкості електронів повністю визначає положення максимуму. Зменшення повздовжньої температури електронного газу у випадку із сильним магнітним полем веде до більш значного росту максимуму гальмівної здатності, ніж без магнітного поля.

Якщо інтерпретувати даний результат відносно задачі електронного охолодження, то можна говорити, що пучок важких заряджених частинок у зовнішньому магнітному полі при взаємодії з електронами з анізотропним розподілом за швидкостями втрачає енергію швидше (значення максимуму) та

охолоджується до менших температур (положення максимуму).

4.4. Висновки до розділу 4

Таким чином в даному розділі в рамках квантово-польового підходу досліджено взаємодію налітаючої важкої зарядженої частинки з електронним газом з анізотропним розподілом за швидкостями в зовнішньому магнітному полі та отримані наступні результати:

1. Знайдено аналітичні вирази для дійсної та уявної частини діелектричної сприйнятливості у випадку анізотропного розподілів електронів за швидкостями в зовнішньому магнітному полі довільної напруженості. У випадку сильних магнітних полів, $a^2 = \frac{\hbar^2 k_t^2}{2m_e \hbar \omega_H} \ll 1$, в лінійному наближенні за параметром малості a^2 вираз для діелектричної сприйнятливості не містить в собі поперечної температури.

2. Отримано аналітичний вираз для гальмівної здатності замагніченого електронного газу в наближенні великих швидкостей налітаючого іона ($V_i/v_e \gg 1$). Показано, що в даному наближенні енергетичні втрати іоном пропорційні $\left(1 - 4(v_{e\parallel}/V_i)^2 (\omega_H/\omega_P)^4 - 2(v_{e\perp}/V_i)^2 (\omega_H/\omega_P)^2\right) L_C$ і в сильних магнітних полях визначаються повздовжньою компонентою розподілу електронів за швидкостями.

3. Використовуючи отримані вирази для діелектричної сприйнятливості, проведено чисельний розрахунок гальмівної здатності електронів у випадку сильних магнітних полів:

а) для ізотропного розподілу електронів за швидкостями зовнішнє сильне магнітне поле пригнічує процес обміну енергії між іоном та електронним газом для всіх значень швидкостей іона. У випадку повного замагнічення, електрони не можуть переходити між рівнями Ландау (напруженість магнітного поля $B \sim 150$ Тл, $T_{e\perp} = 10^{-3}$ еВ), значення максимуму гальмівної здатності зменшилося в 3 рази.

б) при анізотропному розподілі електронів за швидкостями, коли

повздожня температура електронного газу менша на 3 порядки від поперечної, максимум гальмівної здатності в 300 разів перевищує значення при ізотропному розподілі. Положення максимуму відповідає значенням швидкості зарядженої частинки, яка в $2^{1/4}$ раз більша за середню теплову повздожню швидкість електронів. При швидкостях іона, що перевищують теплові швидкості електронів, відбувається різкий спад залежності гальмівної здатності від швидкості іона.

4. Охолодження (передача енергії) важкої зарядженої частинки у сильному зовнішньому магнітному полі електронами з анізотропним розподілом за швидкостями відбуватиметься швидше (значення максимуму гальмівної здатності більше) та глибше (положення максимуму гальмівної здатності визначається воздовжньою тепловою швидкістю електронів, яка на порядок нижча за поперечну), тобто, допустима температура охолодження менша.

5. Для побудови залежності гальмівної здатності електронного газу з урахуванням їх теплового руху від швидкості іона використовувались чисельні методи із залученням алгоритмів паралельного програмування для багатопроцесорних комп'ютерних систем. Ці алгоритми були застосовані на кластері Інституту прикладної фізики НАН України.

ВИСНОВКИ

1. Вперше знайдено в рамках квантово-польового підходу аналітичні вирази для дійсної та уявної частин діелектричної сприйнятливості замагніченого електронного газу з анізотропним розподілом за швидкостями.

2. Використовуючи явний вигляд діелектричної сприйнятливості, чисельно побудовано залежність енергетичних втрат важкої зарядженої частинки від швидкості з врахуванням впливу анізотропної температури електронного газу та сильного зовнішнього однорідного магнітного поля.

3. У випадку відсутності зовнішнього магнітного поля показано, що:

а) при ізотропному розподілі електронів за швидкостями :

1) вплив температури на енергетичні втрати суттєвий при швидкостях іона $V_i \leq v_e$. При $V_i \gg v_e$ доданки, що містять температурну залежність на порядок менші за кулонівський логарифм.

2) максимум гальмівної здатності зростає пропорційно до зменшення температури електронного газу. Положення максимуму відповідає значенням швидкості зарядженої частинки, яка в $2^{1/2}$ раз більша за середню теплову швидкість електронів;

б) при анізотропному розподілі електронів за швидкостями:

1) вплив температури суттєвий для всіх значень швидкостей іона. В наближенні великих швидкостей $V_i \gg v_e$ температурна залежність міститься в множнику перед кулонівським логарифмом у вигляді $1 + 3v_{e\parallel}/V_i - 3v_{e\perp}/V_i$;

2) для випадку, коли повздовжня температура електронного газу менша на 3 порядки від поперечної, максимум гальмівної здатності в 3 рази перевищує значення при ізотропному розподілі. Положення максимуму гальмівної здатності визначається значенням середньої повздовжньої теплової швидкості електронів, і при її зменшенні зміщується в область менших швидкостей.

4. У випадку сильного зовнішнього магнітного поля, коли повністю подавлений поперечний рух електронів (напруженість магнітного поля $B \sim 100$ Тл, поперечна температура електронного газу $T_{e\perp} = 10^{-3}$ eВ), показано,

що:

а) при ізотропному розподілі електронів за швидкостями максимум гальмівної здатності менший в 2.4 рази в порівнянні з випадком без магнітного поля;

б) при анізотропному розподілі електронів за швидкостями, коли повздовжня температура електронного газу менша на 3 порядки від поперечної, максимум гальмівної здатності в 300 разів перевищує значення при ізотропному розподілі. Положення максимуму відповідає значенням швидкості зарядженої частинки, яка в $2^{1/4}$ раз більша за середню теплову повздовжню швидкість електронів.

4. У випадку повної замагніченості електронного газу охолодження (передача енергії) важкої зарядженої частинки електронами з анізотропним розподілом за швидкостями відбуватиметься швидше (значення максимуму гальмівної здатності більше) та глибше (положення максимуму гальмівної здатності визначається вздовжньою тепловою швидкістю електронів, яка на порядок нижча за поперечну), допустима температура охолодження менша.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Khelemelya O.V. Dielectric model of energy losses by a massive charged particle moving through cold magnetized plasma / O.V. Khelemelya, R.I. Kholodov, V.I. Miroschnichenko // Ukr. J. Phys. — 2013. — Vol. 58, no. 8. — P. 725–734.
2. Khelemelya O.V. Quantum field methods in the electron cooling / O.V. Khelemelya, R.I. Kholodov // Problems of Atomic Science and Technology. — 2013. — no. 3(85). — P. 53–57.
3. Khelemelia O.V. The influence of the anisotropic temperature of the electron gas on energy losses of a charged particle in a plasma / O.V. Khelemelia, R.I. Kholodov // Problems of Atomic Science and Technology. — 2015. — no. 1(95). — P. 69–72.
4. Khelemelia O. V. Stopping power of an electron gas with anisotropic temperature / O. V. Khelemelia, R. I. Kholodov // Modern Physics Letters A. — 2016. — Vol. 31, no. 13. — P. 1650081.
5. Khelemelia O.V. The influence of the external magnetic field on energy losses of a charged particle in an electron gas / O.V. Khelemelia, R.I. Kholodov // Problems of Atomic Science and Technology. — 2017. — no. 1. — P. 8–71.
6. Bohr N. On the theory of the decrease of velocity of moving electrified particles on passing through matter / N. Bohr // Philosophical Magazine. — 1913. — Vol. 25, no. 145. — P. 10–31.
7. Bohr N. On the decrease of velocity of swiftly moving electrified particles in passing through matter / N. Bohr // Philosophical Magazine. — 1915. — Vol. 30, no. 178. — P. 581–612.
8. Bethe H. Zur theorie des durchgangs schneller korpuskularstrahlen durch materie / H. Bethe // Annalen der Physik. — 1930. — Vol. 397, no. 3. — P. 325–400.
9. Bloch F. Zur bremsung rasch bewegter teilchen beim durchgang durch materie / F. Bloch // Annalen der Physik. — 1933. — Vol. 408, no. 3. — P. 285–320. — <http://dx.doi.org/10.1002/andp.19334080303>.

10. Fermi E. The ionization loss of energy in gases and in condensed materials / E. Fermi // *Phys. Rev.* — 1940. — Mar. — Vol. 57. — P. 485–493.
11. Fermi E. The capture of negative mesotrons in matter / E. Fermi, E. Teller // *Phys. Rev.* — 1947. — Sep. — Vol. 72. — P. 399–408.
12. Lindhard J. On the properties of a gas of charged particles / J. Lindhard // *Mat. Fys. Medd.* — 1954. — Vol. 28, no. 8.
13. Rousseau C. C. Calculations of stopping cross sections for 0.8- to 2.0-MeV alpha particles / C. C. Rousseau, W. K. Chu, D. Powers // *Phys. Rev. A.* — 1971. — Sep. — Vol. 4. — P. 1066–1070.
14. Wilson W. D. Calculations of nuclear stopping, ranges, and straggling in the low-energy region / W. D. Wilson, L. G. Haggmark, J. P. Biersack // *Phys. Rev. B.* — 1977. — Mar. — Vol. 15. — P. 2458–2468.
15. Ahlen S. P. Theoretical and experimental aspects of the energy loss of relativistic heavily ionizing particles / S. P. Ahlen // *Rev. Mod. Phys.* — 1980. — Jan. — Vol. 52. — P. 121–173.
16. Sigmund P. Stopping of heavy ions: A theoretical approach / P. Sigmund, P. Sigmund. Springer Tracts in Modern Physics 204. — 1 edition. — Berlin : Springer, 2004.
17. Sigmund P. Particle penetration and radiation effects: general aspects and stopping of swift point charges / P. Sigmund. Springer Series in Solid-State Sciences 151. — 1 edition. — Berlin : Springer, 2006.
18. Budker G.I. An effective method of damping particle oscillation in proton and antiproton storage rings / G.I. Budker // *The Soviet Journal of Atomic Energy.* — 1967. — Vol. 22, no. 5. — P. 438–440.
19. Будкер Г.И. Электронное охлаждение и новые возможности в физике элементарных частиц / Г.И. Будкер, А. Н. Скринский // *Успехи физических наук.* — 1978. — Т. 124, № 4. — С. 561–595.
20. Скринский А.Н. Методы охлаждения пучков заряженных частиц / А.Н. Скринский, В.В. Пархомчук // *Физика элементарных частиц и атомного ядра.* — 1981. — Т. 12, № 3. — С. 557–613.

21. Пархомчук В.В. Электронное охлаждение - 35 лет развития / В.В. Пархомчук, А.Н. Скринский // Успехи физических наук. Серия: обзоры актуальных проблем. — 2000. — Т. 170, № 5. — С. 473–493.
22. Мешков И.Н. Электронное охлаждение: статус и перспективы / И.Н. Мешков // Физика элементарных частиц и атомного ядра. — 1994. — Т. 25, № 6. — С. 1487–1560.
23. Меньшиков Л.И. Новые направления в теории электронного охлаждения / Л.И. Меньшиков // Успехи физических наук. — 2008. — Т. 178, № 7. — С. 673–708.
24. Диканский Н.С. Изучение быстрого электронного охлаждения / Н.С. Диканский, В.И. Кононов, В.И. Куделайнен и др. // Труды шестого Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 11-13 октября 1978. — Т. 1. — Дубна : Объединенный институт ядерных исследований, 1979. — С. 120–135.
25. Дербенев Я.С. Состояние работ по электронному охлаждению на НАП-М / Я.С. Дербенев, Н.С. Диканский, В.И. Куделайнен и др. // Труды восьмого Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, Протвино, 19-21 октября 1982. — Т. II. — Дубна : Объединенный институт ядерных исследований, 1983. — С. 242–249.
26. Dikansky N.S. Influence on the sign of an ion charge on friction force at electron cooling / N.S. Dikansky, N.Kh. Kot, V.I. Kudelainen et al. // Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1988. — Vol. 94. — P. 65–73.
27. Будкер Г.И. Состояние работ по электронному охлаждению / Г.И. Будкер, А.Ф. Булушев, Я.С. Дербенев и др. // X Международная конференция по ускорителям заряженных частиц высоких энергий, Протвино, июнь 1977. — Т. I. — Серпухов : Институт физики высоких энергий, 1977. — С. 498–509.
28. Диканский Н.С. Влияние эффектов пространственного заряда на электронное охлаждение / Н.С. Диканский, В.И. Кононов, В.И. Куделайнен и др. // X Международная конференция по ускорителям

- заряженных частиц высоких энергий, Протвино, июнь 1977. — Т. I. — Серпухов : Институт физики высоких энергий, 1977. — С. 510–516.
29. Дербенев Я.С. Эффекты замагниченности в электронном охлаждении / Я.С. Дербенев, А.Н. Скринский // X Международная конференция по ускорителям заряженных частиц высоких энергий. — Т. I. — Серпухов : Институт физики высоких энергий, 1977. — С. 517–522.
 30. Rathsman K. Modeling of electron cooling. Theory, data and applications : Ph. D. thesis / K. Rathsman ; Acta Universitatis Upsaliensis. — Uppsala : Uppsala Universitet, 2010.
 31. Parkhomchuk V.V. Electron cooling: Physics and prospective applications / V.V. Parkhomchuk, A.N. Skrinsky // Rep. Prog. Phys. — 1991. — Vol. 54, no. 7. — P. 919–947.
 32. Poth H. Electron cooling: Theory, experiment, application / H. Poth // Physics Reports(Review Section of Physics Letters). — 1990. — Vol. 196, no. 3 & 4. — P. 135–297.
 33. Zhang Y. Beam cooling and related topics / Y. Zhang // Beam Dynamics Newsletter. — 2014. — Vol. 2.
 34. Derbenev Y.S. Prospects of high energy electron cooling / Y.S. Derbenev // Proceedings of EPAC. — Vienna, Austria : CERN, 2000. — P. 8–12.
 35. Steck M. An electron cooling system for the proposed HESR antiproton storage ring / M. Steck, K. Beckert, P. Beller et al. // Proceedings of EPAC 2004. — Lucerne, Switzerland : European Physical Society Accelerator Group, 5-9 July 2004.
 36. Балакирев В.А. Потери энергии заряженных частиц в магнитоактивной плазме / В.А. Балакирев, В.И. Мирошниченко, В.Е. Сторишко, А.П. Толстолужский // Вопросы атомной науки и техники. — 2010. — Т. 53, № 2. — С. 181–185.
 37. Lutz M. F. M. Physics performance report for PANDA: Strong interaction studies with antiprotons / M. F. M. Lutz et al. — 2009. — arXiv:0903.3905.

38. Widmann E. Perspectives for low energy antiproton physics at FAIR / E. Widmann // *Hyperfine Interactions*. — 2014. — Vol. 229, no. 1. — P. 123–128.
39. Stohlker T. SPARC experiments at the HESR. a feasibility study electron cooling of charged particles / T. Stohlker, R. Schuch, S. Hagemann et al. — 2012.
40. Mao L. J. Experimental demonstration of electron cooling with bunched electron beam / L. J. Mao, H. Zhao, M. T. Tang et al. // *Proceedings of COOL2017*. — Bonn, Germany : CERN, 18-22 September 2017.
41. Kamerdzhev V. Electron cooling at COSY - status and perspectives / V. Kamerdzhev // *Proceedings of COOL2017*. — Bonn, Germany : CERN, 18-22 September 2017.
42. Alexander I. Status report about the HV power supply and its test bench for the HESR Electron cooler / I. Alexander, K. Aulenbacher, J. Dietrich et al. // *Proceedings of COOL2017*. — Bonn, Germany : CERN, 18-22 September 2017.
43. Fedotov A. Status of bunched beam low energy RHIC electron cooling (LEReC) project / A. Fedotov // *Proceedings of COOL2017*. — Bonn, Germany : CERN, 18-22 September 2017.
44. Mollers B. Cooling of ions and antiprotons with magnetized electrons / B. Mollers, C. Toepffer, M. Walter et al. // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*. — 2004. — Vol. 532, no. 1. — P. 279 – 284. — International Workshop on Beam Cooling and Related Topics.
45. Ахиезер А.И. Электродинамика плазмы / А.И. Ахиезер, И.А. Ахиезер, Р.В. Половин и др. — Москва : Наука, 1974.
46. Budker G.I. Experiments on cooling by electrons / G.I. Budker, Ya.S. Derbenev, N.S. Dikanskij et al. // *Translated from Atomnaya Energiya*. — 1976. — January. — Vol. 40, no. 1. — P. 49–52.
47. Пархомчук В.В. Электронное охлаждение: физика и перспективы применения / В.В. Пархомчук, А.Н. Скринский. Препринт ИЯФ-90-210 Института ядерной физики СО РАН СССР. — Новосибирск : ИЯФ, 1990.

48. Basko M.M. The slowing down of fast protons in a plasma with a strong magnetic field / M.M. Basko, R.A. Syunyaev // Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1975. — Vol. 68, no. 1. — P. 105–110.
49. Derbenev Ya.S. Studies on electron cooling of heavy particle beams made by the VAPP-NAP group at the Nuclear physics institute of the Siberian branch of the USSR academy of science at Novosibirsk. / Ya.S. Derbenev, I.N. Meshkov. Preprint CERN 77-08 1977. — Geneva : HESR, 1977.
50. Derbenev Ya.S. The effect of an accompanying magnetic field on electron cooling / Ya.S. Derbenev, A.N. Skrinsky // Particle Accelerators. — 1978. — Vol. 8. — P. 235–243.
51. Sørensen Allan Hvidkjær. Theory of electron cooling in a magnetic field [Text] / Allan Hvidkjær Sørensen // Physics at LEAR with Low-Energy Cooled Antiprotons / Ed. by Ugo Gastaldi, Robert Klapisch. — Boston, MA : Springer New York, 1984. — P. 599–604.
52. Kihara T. Unified theory of relaxations in plasmas. III. quantum effects / T. Kihara // Journal of the Physical Society of Japan. — 1964. — Vol. 19, no. 1. — P. 108–116.
53. Nersisyan H.B. Interactions between charged particles in a magnetic field: A theoretical approach to ion stopping in magnetized plasmas / H.B. Nersisyan, C. Toepffer, G. Zwicknagel. — Berlin : Springer, 2007.
54. Альвен Г. Космическая электродинамика. Основные принципы (2-е изд.) / Г. Альвен, К.-Г. Фельтхаммар. — Москва : Мир, 1967.
55. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа / Л. Спитцер. — 2-е изд. — М. : Мир, 1965.
56. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме / В.Л. Гинзбург. — М. : Физматгиз, 1960.
57. Франк-Каменецкий Д.А. Лекции по физике плазмы / Д.А. Франк-Каменецкий. — 2-е изд. — М. : Атомиздат, 1968.
58. Эккер Г. Теория полностью ионизованной плазмы / Г. Эккер. — М. : Мир, 1974.

59. Александров А.Ф. Основы электродинамики плазмы / А.Ф. Александров, Л.С. Богданкевич, А.А. Рухадзе. — М. : Высш. школа, 1978.
60. Ishimaru S. Statical plasma physics. Volume I: Basic principles / S. Ishimaru. — New York : Addison-Wesley Publishing Company, 1992.
61. Кіценко О.Б. Про проходження пучка заряджених частинок через магнітоактивну плазму / О.Б. Кіценко, К.М. Степанов // Український фізичний журнал. — 1961. — Т. VI, № 3. — С. 297–307.
62. Sorensen A.H. Electron cooling / A.H. Sorensen, E. Bonderup // Nuclear Instruments and Methods. — 1983. — Vol. 215. — P. 27–54.
63. May Robert M. Test ion energy loss in a plasma with a magnetic field / Robert M. May, N. F. Cramer // The Physics of Fluids. — 1970. — Vol. 13, no. 7. — P. 1766–1770.
64. Nersisyan H. B. Stopping of charged particles in a magnetized classical plasma / H. B. Nersisyan // Phys. Rev. E. — 1998. — Sep. — Vol. 58. — P. 3686–3692.
65. Nersisyan H. B. Stopping power of ions in a magnetized two-temperature plasma / H. B. Nersisyan, M. Walter, G. Zwicknagel // Phys. Rev. E. — 2000. — Jun. — Vol. 61. — P. 7022–7033.
66. Nersisyan H. B. Energy loss of ions in a magnetized plasma: Conformity between linear response and binary collision treatments / H. B. Nersisyan, G. Zwicknagel, C. Toepffer // Phys. Rev. E. — 2003. — Feb. — Vol. 67. — P. 026411.
67. Диканский Н.С. Предельные возможности электронного охлаждения / Н.С. Диканский, В.И. Куделайнен, В.А. Лебедев и др. // Препринт 88-61, Новосибирск, Институт ядерных исследований (ИЯФ-88-61). — 1988.
68. Boine-Frankenheim O. Nonlinear stopping power of ions in plasmas / O. Boine-Frankenheim // Physics of Plasmas. — 1996. — Vol. 3, no. 5. — P. 1585–1590.
69. Zwicknagel G. Electron cooling of ions and antiprotons in traps / G. Zwicknagel // AIP Conference Proceedings. — 2006. — Vol. 821, no. 1. — P. 513–522.

70. Zwicknagel G. Theory and simulation of the interaction of ions with plasmas: Nonlinear stopping, ion-ion correlation effects and collisions of ions with magnetized electrons : phdthesis / G. Zwicknagel ; Friedrich-Alexander Universitat Erlangen-Nurnberg. — Erlangen : [s. n.], 2000.
71. D'Avanzo J. Fast-ion interaction in dense plasmas with two-ion correlation effects / J. D'Avanzo, M. Lontano, P. F. Bortignon // *Phys. Rev. E.* — 1993. — May. — Vol. 47. — P. 3574–3584.
72. Novak O. Soliton-like solutions in scattering of electrons by an ion in magnetized plasma / O. Novak, R. Kholodov // *Phys. Scr.* — 2015. — no. 90. — P. 045601.
73. Новак О.П. Рух іона в замагніченому електронному газі як розсіяння в деформованому кулонівському потенціалі / О.П. Новак // *Доповіді Національної академії наук України.* — 2016. — no. 1. — P. 41–46.
74. Zwicknagel G. Energy loss of ions by collisions with magnetized electrons / G. Zwicknagel, C. Toepffer // *AIP Conference Proceedings.* — 2002. — Vol. 606, no. 1. — P. 499–508.
75. Meshkov I. Betacool physics guide for simulation of long term beam dynamics in ion storage rings / I. Meshkov, A. Sidorin, A. Smirnov et al. — Dubna : Joint Institute for Nuclear Research, 2007.
76. Derbenev Y.S. Theory of electron cooling / Y.S. Derbenev // *ArXiv e-prints.* — 2017. — Mar. — 1703.09735.
77. Lindhard J. On the properties of a gas of charged particles / J. Lindhard // *Dan. Mat. Fys. Medd.* — 1954. — Vol. 28, no. 8. — P. 1–57.
78. Боголюбов Н.Н. Общие принципы квантовой теории поля / Н.Н. Боголюбов, А.А. Логунов, А.И. Оксак, И.Т. Тодоров. — М. : Наука, 1987.
79. Лифшиц Е.М. Физическая кинетика / Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. — Vol. X. — М. : Наука, 1979.
80. Ларкин А.И. Прохождение частиц через плазму / А.И. Ларкин // *ЖЭТФ.* — 1959. — Т. 37, № 1. — С. 264–272.

81. Алексеев А.И. Применение методов квантовой теории поля в статистической физике / А.И. Алексеев // УФН. — 1961. — Т. LXXIII, № 1. — С. 41–88.
82. Ахиезер И.А. К теории взаимодействия заряженной частицы с плазмой в магнитном поле / И.А. Ахиезер // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1961. — Т. 40, № 3. — С. 954–962.
83. Horing N.J. Quantum theory of electron gas plasma oscillations in a magnetic field / N.J. Horing // Annals of Physics. — 1965. — no. 31. — P. 1–63.
84. Arista Néstor R. Dielectric response of quantum plasmas in thermal equilibrium / Néstor R. Arista, Werner Brandt // Phys. Rev. A. — 1984. — Mar. — Vol. 29. — P. 1471–1480.
85. Steinberg M. Energy loss of a charged particle in a magnetized quantum plasma / M. Steinberg, J. Ortner // Phys. Rev. E. — 2001. — Mar. — Vol. 63. — P. 046401.
86. Дяченко М.М. Електрична сприйнятливість замагніченої електронної плазми з врахуванням анізотропної температури в рамках квантової теорії поля / М.М. Дяченко, В.І. Мирошніченко, Р.І. Холодов // Доповіді Національної академії наук України. — 2012. — № 10. — С. 70–76.
87. Diachenko M. M. Energy losses of positive and negative charged particles in electron gas / M. M. Diachenko, R. I. Kholodov // Modern Physics Letters A. — 2017. — Vol. 32, no. 06. — P. 1750031.
88. Ландау Л.Д. Статистическая физика. Часть I / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — Т. V. — М. : Наука, 1976.
89. Ландау Л.Д. Квантовая механика (нерелятивистская теория) / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — Т. III. — М. : Наука, 1989.
90. Lapik R. Experiments on cooling by electrons / R. Lapik, I. Meshkov, V. Mozgunov et al. // Workshop on Beam Cooling and Related Topics, 1993, Montreux. Switzerland, p.164-168. — 1993. — P. 164–168.

91. Liouville J. Note sur la theorie de la variation des constantes arbitraires / J. Liouville // Journal de Mathematiques Pures et Appliquies. — 1838. — Vol. I, no. 3. — P. pp. 342–349.
92. Budker G.I. New results of research on electron cooling / G.I. Budker, A.F. Bulushev, N.S. Dikanskij et al. Preprint of Institute of Nuclear Physics USSR Academy of Sciences IYaF 76-32 . Translated at CERN by O. Barbalat CM-P00100706. — Geneva : CERN, 1977.
93. Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. — 4 изд. — М. : Физматгиз, 1963.
94. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций / Г.Н. Ватсон. — Т. I. — М. : Издательство иностранной литературы, 1949.
95. Лебедев П.П. Специальные функции и их приложения / П.П. Лебедев. — 2-е изд. — Москва : Государственное издательство физико-математической литературы, 1963.
96. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — Т. 2. — М. : Наука, 1966.

ДОДАТОК

Список публікацій здобувача за темою дисертації

1. Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати:

1. Khelemelya O.V. Dielectric model of energy losses by a massive charged particle moving through cold magnetized plasma / **O.V. Khelemelya**, R.I. Kholodov, V.I. Miroschnichenko // Ukr. J. Phys. – 2013. – Vol. 58. – No. 8. – P. 725-734.

2. Khelemelya O.V. Quantum field methods in the electron cooling/ **O.V. Khelemelya**, R.I. Kholodov // Problems of atomic science and technology. – 2013. – No. 3(85). – P. 53-57.

3. Khelemelia O.V. The influence of the anisotropic temperature of the electron gas on energy losses of a charged particle in a plasma / **O.V. Khelemelia**, R.I. Kholodov // Problems of atomic science and technology. – 2015. – № 1(95). – P. 69-72.

4. Khelemelia O.V. Stopping power of an electron gas with anisotropic temperature / **O.V. Khelemelia**, R.I. Kholodov // Modern Physics Letters A. – 2016. - Volume: 31. - Number: 13

5. Khelemelia O.V. The influence of the external magnetic field on energy losses of a charged particle in an electron gas / **O.V. Khelemelia**, R.I. Kholodov // Problems of atomic science and technology. – 2017. – №1. – с.68-71.

2. Наукові праці апробаційного характеру:

6. Khelemelya O.V. Electron cooling force calculation in plasma dielectric frame / **O.V. Khelemelya** // Trans-European School of High Energy Physics – TESHER'2011, 7-14 July 2011: proceedings. – Alushta, Crimea, Ukraine, 2011. – P. 177-178.

7. Хелемеля О.В. Втрати важкої зарядженої частинки в замагніченій електронній плазмі / **О.В. Хелемеля** // Матеріали І міжрегіональної науково-практичної конференції молодих учених. Сучасні проблеми експериментальної та теоретичної фізики. – СПЕТФ'2012. – Суми, Україна, 2012. – С. 75-76.

8. Khelemelia O.V. Calculation of the Electron Thermal Plasma Permittivity / **O.V. Khelemelia** // 12-th International Conference on Laser and Fiber-Optical Network Modeling (LFNM), 2-4 October 2013: proceedings. – Sudak, Crimea, Ukraine, 2013. – С. 55-57

9. Хелемеля О.В. Енергетичні втрати зарядженої частинки в електронному газі з врахуванням температури / **О.В. Хелемеля**, Р.І. Холодов // XXI щорічна наукова конференція інституту ядерних досліджень НАН України. – Київ. Україна, 2014. – С. 157.

10. Khelemelia O.V. The Influence of the Anisotropic Temperature of the Electron Gas on Energy Losses of Charged Particle in a Plasma / **O.V. Khelemelia**, R.I. Kholodov // International Conference-School on Plasma Physics and Controlled Fusion. ICPPCF'2014. – Kharkiv. Ukraine. September 15-18, 2014. – P. 62.

11. Хелемеля О.В. Втрати важкої зарядженої частинки в плазмі з врахуванням температури електронного газу / **О.В. Хелемеля**, Р.І. Холодов // Школа-семінар. Багатомасштабне моделювання фізичних процесів у конденсованих середовищах. Multiscale Modeling of Physical Processes in Condensed Matter, 21-22 жовтня 2014: тези доповідей – Суми. Україна, 2014. – С. 28

12. Хелемеля О.В. Вплив анізотропії температури електронів на гальмівну здатність у плазмі / **О.В. Хелемеля**, Р.І. Холодов // Тези доповідей XXII щорічної наукової конференції інституту ядерних досліджень НАН України, 26-30 січня 2015: тези доповідей. – Київ. Україна, 2015. – С. 156-158

13. Хелемеля О.В. Визначення енергетичних втрат важкої зарядженої частинки в замагніченому електронному газі в рамках квантово-польового методу / **О.В. Хелемеля**, Р.І. Холодов // Тезиси докладов XIV конференції по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям, 22-25 марта 2016: тезиси докладов. – Харьков. Украина, 2016. – С. 112.

14. Хелемеля О.В. Діелектрична сприйнятливність електронного газу у зовнішньому магнітному полі / **О.В. Хелемеля** // Матеріали II міжрегіональної науково-практичної конференції молодих учених. Сучасні

проблеми експериментальної та теоретичної фізики. – СПЕТФ‘2016. – Суми, Україна, 2016. – С. 121.

15. Khelemelia O.V. The influence of the external magnetic field on energy losses of a charged particle in an electron gas / **O.V. Khelemelia**, R.I. Kholodov // International Conference-School on Plasma Physics and Controlled Fusion. ICP-PCF‘2016. – Kharkiv. Ukraine. September 12-15, 2016. – P. 74.

16. Хелемеля О.В. Гальмівна здатність електронного газу в зовнішньому магнітному полі / **О.В. Хелемеля**, Р.І. Холодов // Тези доповідей ХХІІІ щорічної наукової конференції інституту ядерних досліджень НАН України, 01-05 лютого 2016: тези доповідей. – Київ. Україна, 2016. – С. Д2.

17. Хелемеля О.В. Вплив сильного магнітного поля на гальмівну здатність електронного газу / **О.В. Хелемеля** // Матеріали ІІІ міжрегіональної науково-практичної конференції молодих учених. Сучасні проблеми експериментальної та теоретичної фізики. – СПЕТФ‘2017. – Суми, Україна, 2017. – С. 75-76.

18. Хелемеля О.В. Енергетичні втрати важкої зарядженої частинки в замагніченому електронному газі / **О.В. Хелемеля**, Р.І. Холодов // ХХІV щорічна наукова конференція інституту ядерних досліджень НАН України. – Київ. Україна, 13-14 квітня 2017. – С. 182.

19. Хелемеля О.В. Енергетичні втрати протона в замагніченому електронному газі / **О.В. Хелемеля** // Тезиси докладов ХVІ конференції по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям, 20-23 марта 2018. – Харьков. Украина, 2018. – С. 113.