# НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ ФІЗИКИ

Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису

Лебединський Сергій Олександрович

УДК 530.145, 537.533.2

### **ДИСЕРТАЦІЯ**

# ПОЛЬОВА ЕЛЕКТРОННА ЕМІСІЯ З ВРАХУВАННЯМ ВПЛИВУ ЗОВНІШНЬОГО МАГНІТНОГО ПОЛЯ ТА РЕЛЯТИВІСТСЬКИХ ЕФЕКТІВ

01.04.02 – теоретична фізика Фізико-математичні науки

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

(підпис, ініціали та прізвище здобувача)

Науковий керівник – Холодов Роман Іванович, кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, доцент

СУМИ – 2019

С.О. Лебединський

### АНОТАЦІЯ

*Лебединський С.О.* Польова електронна емісія з врахуванням впливу зовнішнього магнітного поля та релятивістських ефектів – кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.04.02 – теоретична фізика (104 – фізика та астрономія).– Інститут прикладної фізики Національної академії наук України, Суми, 2019.

Дисертаційна робота присвячена теоретичному дослідженню впливу зовнішнього магнітного поля на польову емісію електронів з металів та врахуванню релятивістських ефектів, що можуть проявлятися при прикладенні високих напруг, а також аналізу та інтерпретації нових експериментальних даних отриманих під час дослідження впливу магнітного поля на високовакуумний пробій.

У роботі вперше доведено припущення про незалежність коефіцієнта проходження потенціального бар'єру від магнітного поля, паралельного електричному, яке використовувалось при побудові теорії польової емісії у даній конфігурації полів.

Вперше виконано узагальнення на релятивістський випадок теорії Фаулера-Нордгейма, що описує явище польової емісії електронів з металу, та знайдено аналітичний вираз для густини струму польової емісії у випадку малих міжелектродних відстаней та високих полів, а також і узагальнений на релятивістський випадок вираз для коефіцієнта проходження потенціального бар'єру на межі метал-вакуум у загальному випадку.

Виявлено ефект релятивістського стиснення ширини потенціального бар'єру на межі метал-вакуум, що призводить до збільшення величини коефіцієнта проходження потенціального бар'єру. Здійснено узагальнення теорії польової емісії Фаулера-Нордгейма для випадку присутності зовнішнього магнітного поля, паралельного електричному, коли електромагнітне поле є полем електричного типу, тобто E > cB.

Вперше отримано загальний вираз для коефіцієнта проходження потенціального бар'єру електроном у присутності зовнішнього однорідного електричного поля, перпендикулярного поверхні металу, та зовнішнього однорідного магнітного поля, паралельного поверхні металу, та отримано аналітичний вираз коефіцієнту проходження у випадку польової емісії за лабораторних значень напруженості електричного поля та роботи виходу електрона з металу, що є справедливим як для лабораторних параметрів протікання польової емісії так і для польової емісії з пульсарів.

Виконано аналіз процесів, що протікають у міжелектродному проміжку у високому вакуумі при прикладанні високих значень напруженостей електричного поля та досліджено можливість впливу на них магнітним полем у розрізі проблеми високовакуумних високоградієнтних пробоїв.

Пояснено експериментально отримане зменшення стійкості до пробоїв при наявності зовнішнього магнітного поля паралельного поверхні електродів у експериментах проведених в Інституті прикладної фізики НАН України та Європейській організації з ядерних досліджень (ЦЕРН) та надано рекомендації по запобіганню виникнення високовакуумного високоградієнтного пробою шляхом прикладення магнітного поля більшого за відсікаюче.

Отримані в дисертації результати крім наукового, носять і академічний характер, оскільки вони представляють собою пряме застосування методів квантової механіки, квантової електродинаміки і математичної фізики. Тому вони можуть бути використані при читанні лекцій студентам старших курсів університетів і аспірантів відповідних спеціальностей.

Ключові слова: польова емісія, хвильова функція, магнітне поле, рівняння Фаулера-Нордгейма, релятивістське узагальнення.

4

### Список публікацій здобувача за темою дисертації

### 1. Наукові публікації, у яких опубліковано основні наукові результати:

- [1] В. І. Мирошніченко і С. О. Лебединський, «Квантово-механічний рух електрона в паралельних магнітному та електричному полях», *Доповіді НАН України*, № 9, с. 61–65, 2014.
- [2] В. І. Мирошніченко і С. О. Лебединський, «Квантово-механічний рух електрона в схрещених однорідних електричному та магнітному полях», Доповіді НАН України, № 11, с. 72-76, 2014.
- [3] **S. O. Lebedynskyi**, V. I. Miroshnichenko, R. I. Kholodov i V. A. Baturin, «The effect of a magnetic field on the motion of electrons for the field emission process description», *Problems of Atomic Science and Technology*, № 98, pp. 62-66, 2015.
- [4] S. Lebedynskyi, O. Karpenko, R. Kholodov, V. Baturin, I. Profatilova, N. Shipman,
   W. Wuensch, «DC vacuum breakdown in an external magnetic field», *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A*, № 908, p. 318–324, 2018.
- [5] S. O. Lebedynskyi, O. O. Pasko, R. I. Kholodov, «Relativistic correction of the field emission current in the Fowler-Nordheim formalism», *Journal of nano- and electronic physics*, № 2, pp. 02022-1–02022-6, 2019.
- [6] S. Lebedynskyi, R. Kholodov, «Field emission with relativistic effects in a magnetic field», *The European Physical Journal D*, №78, v.8, pp.190-1-190-5, 2019.

### 2. Наукові праці апробаційного характеру:

- [1] С. О. Лебединський, «Ш Міжрегіональна науково-практична конференція молодих учених «Сучасні проблеми експериментальної та теоретичної фізики» – СПЕТФ'2014, 16-17 квітня 2014», Рух електрона у паралельних магнітному та електричному полях, Суми, Україна, 2014.
- [2] S. O. Lebedynskyi, V. I. Miroshnichenko, «Trans-European School of High Energy Physics – TESHEP'2014, 17-24 July 2014», *Quantum-mechanical* movement of the electron in electric and magnetic fields, Basivka, Lviv Region, Ukraine, 2014.

- [3] С. О. Лебединський, «І Всеукраїнська науково-практична конференція молодих учених «Сучасні проблеми експериментальної та теоретичної фізики». – СПЕТФ+МНФ'2015», Потенціальний бар'єр на межі металвакуум при наявності схрещених електричного та магнітного полів, Суми, Україна, 2015.
- [4] S. O. Lebedynskyi, R. I. Kholodov, «II Всеукраїнська науково-практична конференція молодих учених «Сучасні проблеми експериментальної та теоретичної фізики». – СПЕТФ+МНФ'2016», Decreasing of the field emission current by the external magnetic field, Суми, Україна, 2016.
- [5] С. О. Лебединський, «XVI Конференція з фізики високих енергій, ядерної фізики і прискорювачів, 20-23 березня 2018 р.», *Релятивістська поправка до струму польової емісії електронів*, Харків, Україна, 2018.
- [6] S. O. Lebedynskyi, «IV Всеукраїнська науково-практична конференція молодих учених «Сучасні проблеми експериментальної та теоретичної фізики». – СПЕТФ+МНФ'2018, 24-25 квітня 2018», *Relativistic correction to the field electron emission current*, Суми, Україна, 2018.
- [7] С. О. Лебединський, Р. І. Холодов, «XVII Конференція з фізики високих енергій, ядерної фізики і прискорювачів, 26-29 березня 2019 р.», в *Релятивістський підхід до тунелювання електронів з конструкційних матеріалів прискорювачів*, Харків, Україна, 2019.
- [8] С. О. Лебединський, Р. І. Холодов, «V Всеукраїнська науково-практична конференція молодих учених «Сучасні проблеми експериментальної та теоретичної фізики». – СПЕТФ+МНФ'2019», Вплив зовнішнього магнітного поля на польову електронну емісію, Суми, Україна, 2019.
- [9] S. Lebedynskyi, «8th International Workshop on Mechanisms of Vacuum Arcs (MeVArc 2019)», Field electron emission in an external magnetic field parallel to the surface, Padova, Italy, 2019.

#### ABSTRACT

*Lebedynskyi S.O.* Field electron emission with regard for an external magnetic field and relativistic effects – Manuscript.

Thesis for the scientific degree of candidate of physical and mathematical sciences (doctor of philosophy) by speciality 01.04.02 – theoretical physics (104 – physics and astronomy) – Institute of Applied Physics, National Academy of Sciences of Ukraine, Sumy, 2019.

The thesis deals with the theoretical study of the influence of an external magnetic field on the field emission of electrons from metals and taking into account relativistic effects that can occur when high voltages are applied, as well as analysis and interpretation of new experimental data obtained during the study of the influence of a magnetic field on high-vacuum breakdown.

The assumption on the independence of the transmission coefficient of a potential barrier from a magnetic field parallel to the electric field, which was used to construct the theory of field emission in this configuration of fields, was first proved.

A relativistic generalization of the Fowler-Nordheim theory, describing the phenomenon of field emission of electrons from a metal, an analytical expression for the current density of field emission in the case of small interelectrode distances and high fields and a general relativistic generalized expression for the transmission coefficient of the potential barrier at the metal-vacuum interface were made for the first time.

The effect of Lorentz contraction of the width of the potential barrier at the metalvacuum interface, which leads to an increasing in the transmission coefficient of the potential barrier was discovered. The Fowler-Nordheim theory of field emission was generalized for the case of the presence of an external magnetic field parallel to the electric one, when the electromagnetic field is an electric type field, i.e. E > cB.

A general expression for the transmission coefficient of a potential barrier in the presence of an external uniform electric field perpendicular to the metal surface and an external uniform magnetic field parallel to the metal surface was obtained for the first time, as well as an analytical expression for the transmission coefficient both for the field emission in laboratory values of electric field strength and work function electron from a metal and for the field emission from pulsars.

An analysis of the processes occurring in the interelectrode gap in high vacuum in presents of high electric field and the possibility of influencing them by a magnetic field in the context of the problem of high-vacuum high-gradient breakdowns was investigated.

The experimentally obtained at the Institute of Applied Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine and the European Organization for Nuclear Research (CERN) decreasing in resistance to breakdowns in the presence of an external magnetic field, parallel to the electrode surface, was explained. Recommendations for preventing the occurrence of high-vacuum high-gradient breakdown by applying a magnetic field larger then cuttoff field was gived.

The results obtained in the thesis, in addition to scientific can have an academic outcome, as they represent a direct application of statistical physics, quantum statistics and mathematical physics methods. Therefore, they can be used for lecturing for students of senior courses of universities and graduate students of the corresponding specialties.

**Key words:** field emission, wave function, magnetic field, Fowler-Nordheim equation, relativistic generalization.

### The publication list of the applicant of PhD thesis

### 1. The scientific works containing the main published scientific result:

- [1] V. I. Miroshnichenko, S. O. Lebedynskyi, «The quantum-mechanical movement of an electron in parallel magnetic and electric fields», *Reports of the National Academy* of Sciences of Ukraine, № 9, pp. 61–65, 2014.
- [2] V. I. Miroshnichenko, S. O. Lebedynskyi, «The quantum-mechanical movement of an electron in crossed uniform electric and magnetic fields», *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, № 11, pp. 72-76, 2014.
- [3] S. O. Lebedynskyi, V. I. Miroshnichenko, R. I. Kholodov, V. A. Baturin, «The effect of a magnetic field on the motion of electrons for the field emission process description», *Problems of Atomic Science and Technology*, № 98, pp. 62-66, 2015.
- [4] S. Lebedynskyi, O. Karpenko, R. Kholodov, V. Baturin, I. Profatilova, N. Shipman,
   W. Wuensch, «DC vacuum breakdown in an external magnetic field», *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A*, № 908, p. 318–324, 2018.
- [5] S. O. Lebedynskyi, O. O. Pasko, R. I. Kholodov, «Relativistic correction of the field emission current in the Fowler-Nordheim formalism», *Journal of nano- and electronic physics*, № 2, pp. 02022-1–02022-6, 2019.
- [6] S. Lebedynskyi, R. Kholodov, «Field emission with relativistic effects in a magnetic field», *The European Physical Journal D*, №78, v.8, pp190-1-190-5, 2019.

### 2. The scientific works of an approbatory character:

- [1] S. O. Lebedynskyi, «Proceeding of III inter-regional scientific conference of young scientists. Modern problems of experimental and theoretical physics– SPETF'2014, 16-17 April 2014 », An electron motion in parallel magnetic and electric fields, Sumy, Ukraine, 2014.
- [2] S. O. Lebedynskyi, V. I. Miroshnichenko, «Trans-European School of High Energy Physics – TESHEP'2014, 17-24 July 2014», B Quantum-mechanical movement of the electron in electric and magnetic fields, Basivka, Lviv Region, Ukraine, 2014.

- 10
- [3] **S. O. Lebedynskyi**, «Proceeding of I All-Ukrainian scientific conference of young scientists. Modern problems of experimental and theoretical physics and methodology for teaching physics. SPETF+MNF'2015, 15-16 April 2015», *A potential barrier on the metal-vacuum boundary in crossed uniform electric and magnetic fields*, Sumy, Ukraine, 2015.
- [4] S. O. Lebedynskyi, R. I. Kholodov, «Proceeding of I All-Ukrainian scientific conference of young scientists. Modern problems of experimental and theoretical physics and methodology for teaching physics. – SPETF+MNF'2016, 13-14 April 2016», *Decreasing of the field emission current by the external magnetic field*, Sumy, Ukraine, 2016.
- [5] S. O. Lebedynskyi, Proceeding of XVI Conference on high-energy physics, nuclear physics and accelerators, 20-23 March 2018», *Relativistic correction to the field electron emission current*, Kharkiv, Ukraine, 2018.
- [6] S. O. Lebedynskyi, «Proceeding of IV All-Ukrainian scientific conference of young scientists. Modern problems of experimental and theoretical physics and methodology for teaching physics. – SPETF+MNF'2018, 24-25 April 2018», *Relativistic correction to the field electron emission current*, Sumy, Ukraine, 2018.
- [7] S. O. Lebedynskyi, R. I. Kholodov, «Proceeding of XVII Conference on highenergy physics, nuclear physics and accelerators, 26-29 March 2019 – Kharkiv», B *Relativistic approach to the tunneling of electrons from structural materials of accelerators*, Kharkiv, Ukraine, 2019.
- [8] S. O. Lebedynskyi, R. I. Kholodov, «Proceeding of V All-Ukrainian scientific conference of young scientists. Modern problems of experimental and theoretical physics and methodology for teaching physics. – SPETF+MNF'2019, 23-24 April 2019 », *Influence of an external magnetic field on the field electron emission*, Sumy, Ukraine, 2019.
- [9] S. Lebedynskyi, «8th International Workshop on Mechanisms of Vacuum Arcs (MeVArc 2019)», Field electron emission in an external magnetic field parallel to the surface, Padova, Italy, 2019.

# **3MICT**

Вступ	
Розділ	1 Польова електронна емісія
1.1	Теорії польової емісії електронів19
1.1.1	Експериментальне підтвердження теорії польової емісії
1.2	Польовий емісійний струм високих густин
1.2.1	Досягнення високих густин струму польової емісії
1.2.2	Виникнення вакуумного пробою
1.3	Вплив магнітного поля на процес польової емісії електронів з металу 29
1.3.1	Теоретичне дослідження впливу магнітного поля
1.3.2	Експерименти з вивчення впливу магнітного поля на польовий струм
1.3.3	Вплив магнітного поля на високоградієнтний вакуумний пробій 32
Висно	вки до Розділу 1
Розділ	2 Квантово-механічний рух електрона в електричному та магнітному
полях	
2.1	Рух електрона в зовнішніх паралельних електричному та магнітному полях
2.2	Рух електрона в зовнішніх взаємно перпендикулярних електричному та
магніт	ному полях
2.3	Квантово-механічний рух електрона в зовнішніх електричному та
магніт	ному полях при довільному куті між ними48
Висно	вки до Розділу 2
Розділ	3 Релятивістське узагальнення теорії польової емісії
3.1	Релятивістська поправка до струму польової емісії в рамках формалізму
Фауле	ра-Нордгейма
3.2	Узагальнений на релятивістський випадок коефіцієнт проходження
потени	ціального бар'єру70
3.3	Ефект релятивістського стиснення потенціального бар'єру

12	
3.4 Вплив магнітного поля на коефіцієнт проходження потенціального бар'єру	
Висновки до розділу 3	
Розділ 4 Дослідження впливу магнітного поля на польову емісію та інші	
процеси в вакуумному проміжку	
4.1 Вступ	
4.2 Теоретичні дослідження впливу магнітного поля на вакуумний пробій 91	
4.3 Вплив перпендикулярних електричного та магнітного полів на коефіцієнт	
проходження потенціального бар'єру та вакуумний пробій	
4.4 Лоренц-інваріантний польовий емісійний струм	
4.5 Вплив магнітного поля на електрони в міжелектродному проміжку 103	
Висновки до Розділу 4	
Висновки	
Список використаних джерел 110	
Додаток	

### ВСТУП

Актуальність теми. Дослідження явища польової електронної емісії, як самостійного напряму експериментальних та теоретичних досліджень, бере свій початок з 20-х років минулого століття, що пов'язано зі зростанням експериментальних можливостей отримання високих струмів та необхідністю створення теорії «холодної» емісії. Польова емісія має велике застосування і в даний час: польова електронна мікроскопія, польова електронна спектроскопія, польові джерела електронів та електронні гармати, холодні катоди, вакуумна наноелектроніка. Тому, виявлення нових властивостей польової емісії електронів є, безумовно, актуальним завданням теоретичної фізики, незважаючи на глибоке дослідження цього питання.

Зі зростанням експериментальних потужностей, з'явилась змога використовувати екстремально високі значення напруженостей електричного поля, внаслідок чого рух електрона може ставати релятивістським, але наявні теоретичні дослідження не враховують вплив релятивістських факторів на процес польової емісії електронів. Також польова емісія електронів за екстремально високих значень напруженостей електричного поля відбувається і з полярної області замагнічених нейтронних зірок, однак описується у даний час без врахування релятивістських ефектів.

Можливості збільшення густини струму польової емісії ретельно досліджені, що пояснюється широким використанням цього явища для холодних катодів, мікроскопії та джерел електронів. Проте, з розвитком прискорювальної техніки виникла необхідність використання все більших прискорювальних градієнтів. Разом з цим, польова емісія може бути негативним чинником у процесі прискорення, викликаючи вакуумний пробій всередині прискорювальної структури.

Експерименти на макетних установках прискорювальних структур компактного лінійного електрон-позитронного прискорювача в проекті CLIC (Compact LInear Collider) показали, що при введенні потужності високочастотного електромагнітного поля, яка забезпечує напруженість електричного поля на осі

прискорювальної структури величину порядку 100 МВ/м, на поверхні прискорювальної структури виникають високочастотні високовакуумні пробої.

Виходячи із викладеного вище, стає зрозуміло, що необхідно більш детально дослідити польову емісію електронів з металу, як початковий етап високовольтного високовакуумного пробою, вплив магнітного поля, на порядок меншого від відсікаючого (cut-off magnetic field), та врахування релятивістських ефектів.

Зв'язок роботи 3 науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалась у відділі № 10 «Пучків заряджених частинок» та в відділі №40 «Квантової електродинаміки сильних полів» Інституту прикладної фізики НАН України і є частиною досліджень, які проводилися за темами: «Дослідження фізичних факторів, що впливають на виникнення високовакуумних пробоїв в структурах CLIC при градієнтах прискорюючих полів до 100 MB на метр» (державний реєстраційний номер 0113U006188, термін виконання 2013-2014 «Дослідження фізичних факторів, що pp.), впливають на виникнення високовакуумних пробоїв в структурах CLIC при градієнтах прискорюючих полів до 100 MB на метр» (державний реєстраційний номер 0114U006582, термін виконання 2014 р), «Теоретичні та експериментальні дослідження впливу зовнішнього магнітного поля на імовірність виникнення високо-вакуумного пробою» (державний реєстраційний номер 0114U002952, термін виконання 2014-2015 pp.), «Розробка методів підвищення стійкості матеріалів прискорюючих структур до високовакуумних електричних розрядів в структурах коллайдера CLIC та експериментальні дослідження впливу зовнішнього магнітного поля на імовірність виникнення високовакуумного пробою» (державний реєстраційний номер 0116U006687, термін виконання 2016 р.), «Квантово-електродинамічні і колективні процеси в надсильних полях, зокрема при зіткненнях важких іонів та в задачі електронного охолодження» (державний реєстраційний номер 0111U010612, термін виконання 2012-2016 рр.), «Розробка методів підвищення стійкості матеріалів прискорюючих структур до високовакуумних електричних розрядів в коллайдера CLIC та експериментальні дослідження структурах впливу зовнішнього магнітного поля на імовірність виникнення високовакуумного

пробою» (державний реєстраційний номер 0117U003562, термін виконання 2017 рр.), «Квантово-польові підходи в задачах зіткнення важких іонів і електронів в електромагнітних полях» (державний реєстраційний номер 0116U005848, термін виконання 2017-2021 рр.), «Дослідження впливу модифікації поверхневих шарів матеріалів для прискорюючих структур коллайдера CLIC на струм польової емісії та вірогідність високовакуумних пробоїв» (державний реєстраційний номер 0118U006150, термін виконання 2018 р.).

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є побудова релятивістської теорії польової емісії електронів із металів за присутності зовнішнього магнітного поля.

Досягнення поставленої мети передбачало виконання таких основних наукових завдань:

- визначення руху електрона у міжелектродному проміжку при довільній конфігурації електричного та магнітного полів;
- релятивістське узагальнення теорії польової емісії електронів з металу;
- вивчення впливу зовнішнього магнітного поля, паралельного поверхні металу, на протікання польової емісії електронів;
- встановлення залежності протікання передпробійних процесів у міжелектродному проміжку від магнітного, поля паралельного поверхні металу;
- пояснення експериментів ЦЕРН та Інституту прикладної фізики НАН України з вивчення електростатичних високовакуумних пробоїв, де невелике магнітне поле зменшує градієнтну стійкість.

**Об'єктом дослідження** є процес утворення струму польової емісії електронів у присутності зовнішніх однорідних електричного та магнітного полів та з урахуванням релятивістських поправок.

**Предметом дослідження** є релятивістські ефекти та вплив зовнішнього магнітного поля на коефіцієнт проходження потенціального бар'єру.

Методи дослідження. При виконанні роботи використовується математичний апарат квантової механіки та квантової електродинаміки. Процес

польової емісії електронів розглядається в рамках підходу Фаулера-Нордгейма: потенціальний бар'єр на межі метал-вакуум вважається трикутним, а рух електрона одновимірним.

### Наукова новизна отриманих результатів:

 вперше доведено припущення про незалежність коефіцієнта проходження електроном потенціального бар'єру від магнітного поля паралельного електричному;

 вперше виконано узагальнення теорії Фаулера-Нордгейма на релятивістський випадок і знайдено аналітичний вираз для коефіцієнта проходження потенціального бар'єру у загальному випадку та густину струму польової емісії у випадку малих міжелектродних відстаней;

3) вперше передбачено ефект релятивістського стиснення ширини потенціального бар'єру на межі метал-вакуум, який призводить до збільшення величини коефіцієнта проходження потенціального бар'єру;

4) вперше зроблено узагальнення теорії польової емісії на випадок присутності зовнішнього магнітного поля, перпендикулярного електричному, коли електромагнітне поле є полем електричного типу (E > cB) та отримано загальний вираз для коефіцієнта проходження потенціального бар'єру;

5) отримано аналітичний вираз коефіцієнту проходження потенціального бар'єру, що є справедливим для значень напруженості електричного поля та роботи виходу електрона з металу, як для лабораторних параметрів протікання польової емісії, так і для польової емісії з пульсарів;

6) пояснено зменшення напруги пробою, що спостерігалось в експериментах ІПФ НАН України та ЦЕРН, як наслідок зростання темнового струму через подовження траєкторій електронів, утворених в міжелектродному проміжку за присутності магнітного поля, паралельного поверхні електродів.

### Практичне значення отриманих результатів.

Здобуті в дисертації аналітичні вирази для коефіцієнта проходження потенціального бар'єру з урахуванням релятивістських поправок та у випадку присутності зовнішнього магнітного поля, що є перпендикулярним до електричного, є простими для розуміння й аналізу, а розвинута в роботі теорія, в цілому, може бути застосована для опису широкого кола задач, зокрема для опису польової емісії електронів з конструкційних матеріалів прискорювачів з метою зменшення вірогідності пробою.

У дисертації пояснено експериментально отримане зменшення стійкості до пробоїв при наявності зовнішнього магнітного поля, паралельного поверхні електродів у експериментах проведених в Інституті прикладної фізики НАН України та Європейській організації з ядерних досліджень (ЦЕРН) та надано рекомендації щодо запобігання виникнення високовакуумного високоградієнтного пробою шляхом прикладення магнітного поля, більшого за відсікаюче.

Результати дисертаційної роботи можуть бути використані в ШФ НАН України, ННЦ "ХФТІ" НАН України, Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, Харківському національному університеті імені В. Н. Каразіна, CLIC (Compact LInear Collider), ILC (International Linear Collider) та інших наукових центрах.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно або при його безпосередній участі. У роботах, опублікованих у співавторстві, здобувачеві належать основні розрахунки, побудова графічних залежностей, активна участь у постановці деяких завдань, обговоренні отриманих результатів та написанні текстів статей.

Особистий внесок дисертанта в опублікованих роботах полягає у наступному. У роботі [1] розв'язана квантово-механічна задача про рух електрона в зовнішніх колінеарних електричному та магнітному полях. У роботі [2] розв'язана квантово-механічна задача про рух електрона в зовнішніх однорідних схрещених електричному та магнітному полях. Знайдено спектр можливих значень енергії електрона. У роботі [3] розв'язане рівняння Шрьодінгера для хвильової функції електрона, що рухається в суперпозиції зовнішніх постійних і однорідних електричного і магнітного полів під довільним кутом між ними. Показано зміну потенціального бар'єру під впливом магнітного поля, паралельного поверхні металу. У роботі [4] виконано узагальнення рівняння Фаулера-Нордгейма, яке дозволило врахувати вплив магнітного поля, паралельного поверхні катода, на

польовий емісійний струм. Також було теоретично розглянуто передпробійні процеси, які протікають у міжелектродному проміжку та можливість впливу на них магнітним полем. У [5] виконане релятивістське узагальнення виразу для струму польової емісії електронів у випадку малих міжелектродних відстаней. У роботі [6] зроблене релятивістське узагальнення виразу для коефіцієнта проходження потенціального бар'єру, що дало змогу також врахувати вплив зовнішнього магнітного поля, паралельного поверхні.

Апробація результатів дисертації. Матеріали дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на наукових семінарах в Інституті прикладної фізики НАН України, на 4 міжнародних та вітчизняних науково-технічних конференціях: Trans-European School of High Energy Physics, Basivka, Lviv Region, Ukraine (2014); XIII International conference "Plasma electronics and new acceleration methods", Kharkiv, Ukraine (2015); Конференція з фізики високих енергій, ядерної фізики і прискорювачів, Харків, Україна (2018, 2019); Сучасні проблеми експериментальної та теоретичної фізики, Суми, Україна (2014-2019).

Роботи [1-3] увійшли до циклу наукових праць «Вплив магнітного поля на процес польової емісії», що був відзначений Почесною грамотою Президії НАН України, від 2 березня 2016 року.

**Публікації.** Основні результати дисертації опубліковані в 15 наукових роботах, з яких 6 статей опубліковано в спеціалізованих наукових журналах, що входять до переліку ДАК МОН України, і 9 у вигляді тез доповідей у збірниках наукових праць конференцій.

Структура і обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел, в якому міститься 129 найменувань. Обсяг дисертації складає 124 сторінки машинописного тексту та містить 8 рисунків.

### РОЗДІЛ 1 ПОЛЬОВА ЕЛЕКТРОННА ЕМІСІЯ

### 1.1 Теорії польової емісії електронів

Польова емісія спостерігалася в багатьох ранніх експериментах, де було прикладено високу напругу до загострених катодів або вузьких щілин у вакуумних трубках. Вперше детально це явище було описане в роботі [16]. Проте, для фізиківекспериментаторів, які хотіли б мати більш відтворюваний і надійний ефект, польова емісія була не досить цікавою протягом майже півстоліття. Пізніше в роботі [17] було описано використання рентгенівської трубки із загостреним холодним катодом і отримання досить хаотичного струму в кілька міліампер під дією сильного електричного поля. У 1923 році Шотткі [18] зробив першу спробу пояснити польову емісію з холодних металів, запропонувавши модель, яка пояснювала зв'язок термоелектронної емісії з його потенціалом. Суть моделі полягала в тому, що зовнішнє поле зменшує висоту потенціального бар'єру на поверхні металу. Бар'єр розташований на відстані від поверхні, де сила дзеркального відображення дорівнює силі дії поля на електрон  $eF = \frac{e^2}{4x_c^2}$  (-*e* – заряд електрона, F – сила поля). Сила дзеркального відображення і сила зовнішнього поля разом знижують потенціальний бар'єр  $\Delta \varphi = \frac{e^2}{4x_0} + eFx_0$  і шляхом виключення  $x_0$  Шотткі отримує  $\Delta \varphi = e\sqrt{eF}$  для зменшення роботи виходу.

Для відносно малих полів це зменшення термоелектронної роботи виходу експериментально встановлено і повністю узгоджується з передбаченням Шотткі. Відтоді вважалося, що польова емісія з холодних катодів пояснюється повним зменшенням потенціального бар'єру на поверхні металу, яке має місце при  $E = 1, 4 \cdot 10^{10}$  В/м для вольфраму з роботою виходу  $\varphi = 4,5$  еВ.

Проте, попередні експерименти проводилися за величини поля лише близько  $E = 10^8$  В/м. Шотткі пояснив цю невідповідність, припустивши, що польова емісія відбувається від субмікроскопічних виступів на катоді, які локально збільшують величину поля (коефіцієнт посилення поля оцінюється в межах від десяти до ста).

Теорія Шотткі 1923 року стимулювала досить широкі дослідження протягом наступних семи років. У роботі [19] було використано малі проміжки між сферами танталу та іридію, як катодом і анодом, та отримано напруженості поля до  $8 \cdot 10^8$  В/м. Більшість наступних дослідників працювали з катодами, що мають малий радіус кривизни. Спостереження [20] були виконані з дрібними дротяними петлями, щіткою з дротів або однією електрохімічною точкою травлення. Виміряні вольт-амперні характеристики були побудовані як залежність логарифму струму від квадратного кореня прикладеної напруги, але прямих ліній, які можна було очікувати за теорією Шотткі, виявлено не було. Подальшим наслідком цієї теорії є значна залежність «нульової» роботи виходу від температури нижче критичного поля. Проте у роботі [20] було показано, що польові струми не залежать від температури в широкому діапазоні від 300 К до початку термоелектронної емісії при 1500 К.

У роботі [21] дослідники працювали з тонким вольфрамовим дротом розташованим на осі циліндричного анода в дуже хорошому вакуумі. Після кондиціонування катоду проходженням невеликих емісійних струмів, поля піднімалися до величини  $5 \cdot 10^8$  В/м. З появи свічення на аноді було зроблено висновок, що польова емісія виникала лише з кількох плям на поверхні катода і кондиціювання було пов'язано зі згладжуванням цих субмікроскопічних виступів шляхом іонного бомбардування залишковими газами. У даній роботі також спостерігалася відсутність температурної залежності до 1000 К.

Важливим відкриттям [22] було те, що виміряні вольт-амперні характеристики можна описати формулою  $i = A \cdot e^{-B_F}$ , так що графік log *i* від  $\frac{1}{F}$  дав пряму у всьому доступному діапазоні. Автори також намагалися включити

польову та термоелектронну емісію в одну формулу, розширивши рівняння Річардсона:

$$i = A(T + cF)^2 \exp\left(\frac{-b}{T + cF}\right),$$
(1.1)

де A, b, c константи.

Згодом експериментально було досліджено, що в діапазоні нижчому за початок термоелектронної емісії, польова емісія була повністю незалежна від температури [23]. Ефект, виявлений у роботі [22] в проміжному діапазоні від 1000 до 1500 К, очевидно, був обумовлений деякою активацією вольфрамового катода торієм, що призвело до посилення термоелектронної емісії ефектом Шотткі. Повна відсутність впливу температури була також показана у роботі [24], де відкачану та герметичну емісійну трубку занурили в рідке повітря, не помітивши змін в емісії.

У роботах [20, 21, 22] було зроблено висновок про те, що теорія Шотткі не може описати експериментальні результати і необхідно використовувати квантову теорію замість класичної для опису явища польової емісії електронів.

З написанням Зомерфельдом електронної теорії металів, польова емісія була пояснена з точки зору квантової теорії поля. Першу чітку картину механізму отримали Фаулер та Нордгейм [25] у 1928 році. Використовуючи статистику Фермі-Дірака для розподілу енергії електронів металу, вони обчислювали кількість електронів кожного діапазону енергії, що надходять зсередини металу на поверхневий потенціальний бар'єр. Вони розв'язали рівняння Шрьодінгера, щоб знайти частку електронів, які проникають крізь потенціальний бар'єр на межі метал-вакуум. Фаулер та Нордгейм отримали формулу для густини струму польової емісії, інтегруючи добуток числа електронів, що падають на потенціальний бар'єр, на коефіцієнт проходження потенціального бар'єру:

$$j = \frac{e^{3}}{4\pi^{2}\hbar} \frac{\sqrt{\mu}}{(\varphi + \mu)\sqrt{\varphi}} E^{2} e^{-\frac{4}{3}\frac{\sqrt{2m}\varphi^{\frac{3}{2}}}{\hbar}\frac{\varphi^{\frac{3}{2}}}{eE}},$$
(1.2)

де -e – заряд електрона,  $\hbar$  – стала Планка,  $\mu$  – енергія Фермі всередині металу,  $\varphi$  – термічна робота виходу. Бар'єр на межі метал-вакуум, який використовувався виведення цього фундаментального рівняння Фаулера-Нордгейма, є для трансформованим прямокутним потенціальним бар'єром відсутності V зовнішнього поля у трикутний потенціальний бар'єр під дією сильного електричного поля. У наступній своїй роботі Нордгейм удосконалив розрахунки врахування деформації потенціального бар'єру силами дзеркального для відображення Шотткі, що призвело до дещо зниженої напруженості поля, необхідної для отримання тієї ж густини струму [26].

Фізична картина емісійних явищ, згідно Фаулера та Нордгейма, полягає в наступному: при термоелектронній емісії електрони, які отримали достатньо теплової енергії, проходять над потенціальним бар'єром; у польовій емісії, електрони з енергією нижче рівня Фермі тунелюють крізь потенціальний бар'єр. Формула Фаулера-Нордгейма відповідає графіку, приведеному у [22], у координатах log *i* від  $\frac{1}{F}$ , за винятком експериментально важкого для спостереження множника  $F^2$  перед експоненціальною функцією. Він не узгоджується з узагальненою формулою для термоелектронної та польової емісії, яка в якості емпіричного рівняння була перевірена лише для слабких полів при високих температурах і для сильних полів при низьких температурах, але не в проміжній області. Формула Фаулера-Нордгейма передбачає значні емісійні струми при напруженостях електричного поля в п'ять разів менше, ніж теорія Шотткі, таким чином припущення про коефіцієнти підсилення поля є достатнім для узгодження з експериментальними даними.

Після становлення квантової механіки, були спроби визначення коефіцієнта підсилення поля з деяких виміряних характеристик для катода з відомою роботою

виходу [27]. Для електролітично витравленої вольфрамової голки фактичне поле виявилося в 2,68 разів більшим, ніж виміряне поле. Крім того, був отриманий метод для пояснення зміни перетинання ординат у графіку Фаулера-Нордгейма (графік  $\frac{\log i}{F^2}$  від  $\frac{1}{F}$ ), яка відбувається, якщо катод активується за допомогою електропозитивного забруднення, наприклад натрієм.

Різні спроби підтвердити експериментально теорію Фаулера-Нордгейма були зроблені протягом тридцятих років [28, 29, 30, 31], але реального прогресу не вдавалося досягти через неможливість створення певної поверхні катода. Існування виступів неправильної форми, які відповідають за польову емісію з вістрів виявили в роботі [28]. Сподівання деяких дослідників [29, 30, 31] на отримання дійсно гладкої поверхні з використанням рідкої ртуті не виправдались. Проте, поле початку дугового розряду, який викликаний польовою електронною емісією величиною близько 1  $A'_{CM^2}$ , зросло до  $1.8 \cdot 10^8 B'_{M}$ . Для запобігання спотворення поверхні рідини за допомогою поля використовувалися мікросекундні імпульси. Незважаючи на всі запобіжні заходи, існування фактора підсилення поля, (щонайменше 15) залишалося не поясненим.

### 1.1.1 Експериментальне підтвердження теорії польової емісії

Експерименти з пошуку залежності від роботи виходу, передбаченої теорією Фаулера-Нордгейма, дали досить суперечливі результати. У роботі [32] використовувався торованний вольфрамовий катод, роботу виходу якого можна було контролювати, змінюючи активацію і вимірюючи термоелектронну емісію. Однак величина струму польової емісії з цього катода виявилася незалежною від термоелектронної роботи виходу. Було зроблено припущення, що польова емісія виникала лише з невеликих виступів, які не змінювалися активацією, як це робила об'ємна поверхня у випадку термоелектронної емісії.

У роботі [33] була встановлена залежність від роботи виходу у третьому степені, а не передбаченого степеня 3/2. Тут знову спостерігались вістря, які

утворювалися або гострими кристалітами конденсованого матеріалу, або дугою при руйнівних розрядах. За рік до цього автори [34] отримали зображення емітувального вістря за допомогою електронного мікроскопа, демонструючи, що емісія відбувається з досить випадкових і зникаючих окремих груп вістрь.

У повній згоді з припущенням теорії Фаулера-Нордгейма про те, що емітовані електрони надходять безпосередньо з вершини розподілу Фермі, Мюллер [33] не зміг виявити жодного охолоджуючого ефекту внаслідок польової емісії, продемонстрованого напередодні у роботі [35]. У цій роботі застосували метод загаяних потенціалів для вимірювання енергії емітованих електронів. Проте насправді вузький розподіл швидкостей електронів в діапазоні нижче рівня Фермі отримали автори [33, 36] за допомогою електродної системи з точковим емітером і концентричними електродами.

Період нової продуктивної роботи почався з застосуванням в 1937 році Мюллером [37] польового емісійного мікроскопу. Він зазначав, що при високих температурах поверхнева міграція на чистій області металу має тенденцію до отримання дуже ідеально округлих, гладких і майже напівсферичних вістрь розмірами порядку атомної решітки. Зразки, отримані з W, Mo, Ni i Cu, вказували на відмінності в густині струму на різних площинах монокристалічного емітера і переконливо продемонстрували відсутність вістрь неправильної форми. Також була показана адсорбція і десорбція кисню, барію, торію, та їх залежність від кристалографічної структури субстрату та поверхнева міграція при підвищених температурах. Низька емісія з площин 011, 112 і 001 кубічної решітки приписувалася принципово високій роботі виходу з цих площин. Було отримано емісійний струм без будь-якого фактора підсилення поля в області до 3,5  $10^9$  В/м, що відповідало теорії Фаулера-Нордгейма та експериментально досягнуто густини струму у  $10^8$  А/см<sup>2</sup>.

Автори [38] використали польовий емісійний мікроскоп Мюллера, щоб дослідити польову емісію з чистого W, Mo i Ni, а також адсорбційні шари Ba, Th i Na та відзначили зміну геометрії вістря внаслідок міграції поверхні під впливом поля при підвищеній температурі. У роботі [39] за допомогою електронного

мікроскопу було більш точно виміряно геометрію емітера та виконано точніші обчислення поля. Шляхом вимірювання характеристик W-наконечників, покритих Ba, K і Cs в польовому емісійному мікроскопі була підтверджена обґрунтованість теорії Фаулера-Нордгейма з експериментальною похибкою, яка не перевищує 15 %, а також залежність від степеня роботи виходу.

### 1.2 Польовий емісійний струм високих густин

### 1.2.1 Досягнення високих густин струму польової емісії

Початок фундаментальних досліджень в області високих струмів і перші досягнення в практичному використанні польової емісії пов'язані з дослідженнями Дайка і його групи [40, 41, 42, 43, 44, 45]. Використання високовакуумного обладнання, імпульсних методів і сучасних технологій дозволили дослідити емісію електронів при більших значеннях напруги та густинах струму, ніж були досліджені раніше. Густини струму 107-108 А/см<sup>2</sup> були досягнуті в імпульсних і стаціонарних умовах відповідно [40, 41]. У роботі [40] спостерігались помітні відхилення від теорії Фаулера-Нордгейма в області сильного поля, які виявлялися як субекспоненціальна залежність струму польової емісії від прикладеного потенціалу. Автори пояснювали спостережуване явище впливом просторового заряду, який викликав зниження напруженості електричного поля поблизу поверхні емітера. Робота [43] забезпечила більш докладне теоретичне і експериментальне підтвердження цієї інтерпретації. У роботі [46] автор припустив, що спостережуваний відхід від теорії може бути пов'язаний із тим фактом, що форма потенціального бар'єру відрізняється від передбачуваної в теорії сил дзеркального відображення. Ця різниця стає більшою в області сильного поля, де розміри бар'єрів мають той же порядок, що і міжатомні відстані [47].

Елінсон і його колеги [48, 49, 50, 51, 52] виявили, що максимальні значення струму залежали від геометрії емітера і показали, що при збільшенні тілесного кута конуса наконечника густина струму може бути збільшена приблизно на порядок без пошкодження вістря емітера. Ця група дослідників показала програму пошуку відповідних матеріалів для емісійних катодів і досліджувала матеріали на основі металоподібних та напівпровідникових з'єднань, таких як LaB<sub>6</sub> [50, 51, 52] і ZrC [51, 52]. Низка інших досліджень в області високої густини струму була також виконана групою Шуппе [53, 54]. У подальшому у роботах [55, 56, 57, 58] було продемонстровано можливість використання польових емітерів як джерела електронів для електронної мікроскопії з атомним розширенням.

Прогрес у дослідженнях польової емісії при надзвичайно високій щільності струму був досягнутий групою Фурсея [59, 60, 61, 62, 63, 64, 65]. Удосконалення використовуваних експериментальних методів дало змогу збільшити чутливість імпульсних вимірювань у 5-7 разів [59, 60]. Це дозволило провести перші вимірювання максимальних густин струму з локалізованих областей емісії з вістря кристалічного емітера. Імпульсні вимірювання були розширені до діапазону 10<sup>-9</sup>-10<sup>-3</sup> с [61, 62, 63]. Експерименти у квазістаціонарному режимі проводилися в інтервалі 10-2-10 с. У дослідженнях Мєсяца і Фурсея спостерігалися густини струму 10<sup>9</sup> А/см<sup>2</sup> при довжинах імпульсів наносекундного діапазону [63]. Були продемонстровані густини струму до 5.109 А/см<sup>2</sup> для польової емісії, локалізованої на емітувальні області нанометрового діапазону [65]. У експериментах Шредніка і ін. були зареєстровані густини струму до 10<sup>9</sup>-10<sup>10</sup> А/см<sup>2</sup> з наконечників нанометрового розміру в стаціонарних умовах [66]. Після цього, використовуючи наконечники з радіусом вершини ~ 10  $\overset{\circ}{A}$ , вдалося досягти щільності струму  $10^{10}$ -10<sup>11</sup> А/см<sup>2</sup> [67]. Ці щільності струму близькі до теоретичної межі віддачі зони провідності металу, коли ймовірність тунелювання електрона дорівнює одиниці.

У подальшому були розроблені нові ідеї та експериментальні методи і підходи для пояснення спостережень, які не могли бути узгоджені з попередніми теоретичними моделями. Прикладами є енергетичні спектри емітованих електронів, які показують розширення енергетичного спектра при високій густині струму, [68] наявність високоенергетичних і низькоенергетичних хвостів [69, 70], і додаткові піки, які з'являються внаслідок об'ємної зонної структури і поверхневих станів [71]. У деяких дослідженнях [72] спостерігалися додаткові піки при використанні дуже малих атомарно-гострих емітерів. Також у літературі не розглянуто випадок, за якого при високих напругах і достатньо великих міжелектродних відстанях рух електрона стає релятивістським і це, відповідно, не враховується при обчисленні струму польової емісії.

### 1.2.2 Виникнення вакуумного пробою

У той же час, при проведенні експериментів з високими полями у вакуумі починає спостерігатись негативна сторона польової емісії – високовольтні високовакуумні пробої, які призводять до пошкоджень емітувальної поверхні. У роботі [73] розглядаються можливі причини утворення високовольтного вакуумного пробою. Автор вказує, що невеликі польові струми сприяють згладженню поверхні та підвищенню стійкості до пробою, але основну роль тригера пробою відводить скупченню на поверхні матеріалів зі слабкою адгезією.

Низка важливих результатів, пов'язаних із причинами нестабільності й руйнування польових емітерів, було отриманих групою Дайка [40, 41, 42]. Виявилося, що основною причиною руйнування емітера було джоулівське нагрівання вістря емісійним струмом [41, 42]. У разі чистої і гладкої поверхні емітера, нестабільність розвивається по всій емітувальній поверхні. Цей нагрів може також відбуватися локально, коли на емітері виникають ізольовані мікронеоднорідності в результаті, наприклад, іонного бомбардування катода. Усуваючи фактори, ЩО призводять до утворення мікронеоднородностей, була продемонстрована стабільна робота польового емісійного катода у безперервному режимі протягом понад 7500 годин [40, 41, 42]. У цих експериментах густини струму були близькі до максимально досяжних значень ~10<sup>7</sup> A/см<sup>2</sup>.

Роль польової емісії у виникненні пробою вперше було розглянуто у роботі [74]. Автори, провівши серію експериментів у високому вакуумі, прийшли до висновку, що електричне поле, підсилюючись на неоднорідностях поверхні, спричинює протікання польової емісії електронів із подальшим виникненням пробою. Теоретично роль польової емісії у виникненні пробою було розглянуто у

роботі [75]. Автор прийшов до висновку, що причиною виникнення пробою є плавлення поверхні катоду або аноду внаслідок протікання польового струму. У роботі [76] автори прийшли до аналогічного висновку, відзначивши роль геометрії поверхні катоду. Експерименти з постійним струмом продемонстрували теплові ефекти, викликані польовою емісією при високій густині струму [60, 64]. Був виявлений новий тип нестабільності, викликаний спонтанною зміною мікрогеометрії поверхні катода поблизу порога термічного руйнування [61, 62].

Фурсей у своїй роботі [77] експериментально дослідив вплив польової емісії на розвиток пробою. Він пише, що вирішальною стадією ініціювання вакуумного пробою є електричний вибух локальної емісійної системи. Вибухове руйнування емітувального вістря відбувається через його перевантаження струмом великої густини. Вибух вістря супроводжується переходом катодної речовини у щільну плазму. У роботі [78] автор провів вивчення емітувальної поверхні та прийшов до висновку, що передпробійні струми протікають із випадкових піків на поверхні катоду. Були проведені експериментальні та теоретичні дослідження з метою визначення методу підвищення стабільності струму польової емісії і запобігання іонного бомбардування катоду [79, 80]. У дослідженнях групи Фурсея [81] було показано, що поле мікрохвильового діапазону може знизити інтенсивність катодного іонного бомбардування на кілька порядків внаслідок дії на іони відштовхуючого потенціалу поблизу поверхні.

З досягненням великих прискорювальних градієнтів почали вивчатись пробої у високоградієнтних прискорювальних структурах [82]. Також у роботі [83] розглядається негативний вплив омічного нагрівання польовим струмом надпровідної прискорювальної структури. У роботі [84] автори вивчали траєкторії електронів у ВЧ-прискорювальних структурах майбутнього компактного лінійного коллайдера CLIC. Вони прийшли до висновку, що за певних форм стінок прискорювальних структур при частоті електричного поля 30 ГГц темновий струм не буде протікати навіть при напруженості 750 МВ/м. Подальші експерименти проведені в CERN [85] цього не підтвердили, отримавши експериментальні значення в межах 200-250 МВ/м. У той же час науковці починають досліджувати роль польової емісії в розвитку пробою. У роботі [86] була запропонована емпірична формула, яка описує залежність вірогідності пробою від напруженості електричного поля

$$\frac{E^{30}}{BDR} = const, BDR = \left(\frac{\kappa i \pi b \kappa i cm b n po 60 \ddot{b}}{\kappa i \pi b \kappa i cm b i m n y \pi b c i b}\right),$$
(1.3)

де BDR (BreakDown Rate) – відношення кількості імпульсів, які призвели до пробою до загальної кількості імпульсів за умов постійної величини електричного поля та незмінного міжелектродного проміжку. Також було запропоновано [85, 86, 87] використовувати під час експериментів з вивчення пробоїв постійне електричне поле замість ВЧ-поля через велику схожість протікання процесів. У нещодавній роботі [88] була розглянута модель пробою у ВЧ-полі та у постійному полі, яка полягає у розв'язанні задачі локального нагрівання мікровиступу й емісії електронів з нього. Автори відзначають, що дана модель нагрівання емітувального вістря польовими електронами узгоджується з експериментальними даними.

### 1.3 Вплив магнітного поля на процес польової емісії електронів з металу

### 1.3.1 Теоретичне дослідження впливу магнітного поля

Теоретично вплив магнітного поля на польову емісію електронів було досліджено в роботах [89, 90, 91]. Історично першою є робота Блатта [89], у якій розглядається плоска емітувальна поверхня металу і перпендикулярне до неї зовнішнє магнітне поле. Температура металу береться рівною нулю, що фізично відповідає виконанню вимоги  $\mu_B B >> kT$ , де  $\mu_B$ - магнетон Бора.

Вплив магнітного поля на польову емісію електронів обумовлюється зміною спектру електронів провідності, тобто густини електронних станів у залежності від енергії. У своїй роботі Блатт припускає, що коефіцієнт проходження потенціального бар'єру не залежить від магнітного поля у такій конфігурації, але це припущення не є доведеним. Повну густину емісійного струму знаходять шляхом інтегрування за енергіями електронів і підсумовуваннями по рівням Ландау. Аналіз наведеного у [89] виразу для густини струму, яке має вигляд суми ряду, показує, що емісійний струм повинен зменшуватись у залежності від магнітного поля  $\sim B^2$ . На це зменшення накладаються періодичні осциляції струму в залежності від 1/B (як в ефекті де-Гааза-ван-Альфена [92]). Осциляції значущі за величиною лише для металів з малою ефективною масою електрона. Так, для вісмуту ( $m^* = 0.01m_0$ відповідно до [92]), при B = 1 Тл і  $E = 3 \cdot 10^9$  В/м осциляції мають складати  $\sim 10$  % від середнього значення.

Польова електронна емісія в магнітному полі досліджувалася і в роботі [90], де розглянуто наближення вільних електронів та трикутна форма потенціального бар'єру. Передбачається, що теж виконується умова  $\mu_B B >> kT$ . Залежність густини струму від магнітного поля, згідно з [90], також носить осцилюючий характер, обумовлений залежністю густини електронних станів від магнітного поля  $\vec{B}$ , а також осциляціями величини хімічного потенціалу (внесок другого ефекту менший). Згідно з оцінками авторів, для матеріалів з малою ефективною масою (~10<sup>-3</sup> ÷10<sup>-2</sup>  $m_0$ ) амплітуда осциляцій складає ~1 % від значень струму у відсутності магнітного поля. У цілому результати роботи [90] узгоджуються з роботою [89]. Результати іншої роботи [91], присвяченої даному питанню не відрізняються від попередніх результатів [89, 90].

У роботі [93] розроблено формалізм для нерелятивістської та релятивістської теорій польової емісії електронів у присутності сильного квантовуючого магнітного поля, паралельного до електричного, що актуально для замагнічених нейтронних зірок. Автори відзначають, що у нерелятивістському випадку коефіцієнт проходження потенціального бар'єру буде ненульовий, якщо електрони не будуть спін-поляризовані в протилежному до зовнішнього магнітного поля напрямку. З іншого боку, польова емісія електронів не відбуватиметься, якщо магнітне поле на поверхні буде більшим за  $B \gg 10^{11}$  Тл. У релятивістському

випадку наявність сильного квантуючого магнітного поля повністю забороняє польову емісію електронів у випадку *B* > 10<sup>9</sup> Тл.

Таким чином, можна зробити висновок, що вплив магнітного поля, паралельного електричному, на польовий емісійний струм має виражатись у зменшенні густини струму при збільшенні поля. На це накладаються незначні за величиною коливання струму. Дані уявлення можна застосовувати за умови, що  $\mu_B B >> kT$ . У той же час, теорія польової емісії за наявності зовнішнього магнітного поля, перпендикулярного електричному, на даний час відсутня.

### 1.3.2 Експерименти з вивчення впливу магнітного поля на польовий струм

Експериментально польова емісія в магнітному полі досліджувалась вперше в роботі [94]. Дослідження були проведені при гелієвих температурах у вакуумі ~ $10^{-9}$  Па. Магнітне поле змінювалось у діапазоні 0÷10 Тл. У результаті не було знайдено ніяких змін в емісійному струмі в межах 1%. Тоді ж вийшло повідомлення [95] про польову електронну емісію в магнітному полі до 1,5 Тл при температурах 78 К і 300 К. Тиск залишкових газів складав ~ $10^{-7}$  Па. При кімнатній температурі спостерігалось незвичайне зменшення струму при збільшенні магнітного поля. При температурах рідкого азоту виникали осциляції струму величиною декілька відсотків при одночасному зменшенні струму. На вольтамперних характеристиках, знятих у магнітному полі, спостерігалися злами. Варто зазначити, що співвідношення  $\mu_{R}B >> kT$  в умовах [95] не виконувалось.

У роботі [96], так само як і у [94], не було виявлено квантові ефекти, передбачені теорією. Експерименти були проведені при гелієвих температурах у надвисокому вакуумі. Автори цієї роботи ставлять під сумнів висновки [95] і висловлюють думку, що ці результати є наслідком поганих вакуумних умов.

Польовій електронній емісії у магнітному полі присвячена робота [97], де було досліджено інтервал індукції магнітного поля до 2 Тл. Експерименти проводились при температурі рідкого гелію в вакуумі понад ~10<sup>-8</sup> Па. Отримані

результати частково узгоджуються з висновками теоретичних робіт. Приводиться три можливі пояснення ефектів, що спостерігаються:

1. Магнітне поле викликає зменшення потоку електронів через межу метал-вакуум.

2. Магнітне поле зменшує як енергію Фермі, так і густину електронних станів.

3. Ефекти, що спостерігаються можуть бути результатом розмірних гальваномагнітних ефектів.

Автори роботи [97] віддають перевагу першому механізму.

### 1.3.3 Вплив магнітного поля на високоградієнтний вакуумний пробій

У роботах [98, 99, 100] досліджувався вплив на польову емісію електронів та передпробійні ефекти магнітного поля до 0,4 Тл при температурах більше 77 К. Слід відзначити, що умова  $\mu_B B >> kT$  при цьому не виконується і, відповідно, не можна використовувати теоретичні узагальнення, наведені у роботах [89, 90, 91] для пояснення описаних нижче явищ. До того ж, характер знайдених ефектів докорінно не співпадає з передбаченнями, які ґрунтувалися на уявленнях про вплив магнітного поля лише на електронну підсистему металу.

Експерименти проводились в основному для імпульсів напруги тривалістю 1-2 мс. Початкова густина струму складала для таких тривалостей імпульсу ~ $(1 \div 5) \cdot 10^9 \text{ A/}_{\text{M}^2}$ . Були виявлені такі основні закономірності. Передпробійні ефекти якісно мають той самий характер, що й за відсутності магнітного поля. Але самовільне зростання струму спостерігається при менших початкових густин струму та протікає швидше. Це означає, що магнітне поле стимулює передпробійні процеси, які мають місце і за його відсутності. Разом з тим, спостерігались коливання струму, які пояснювались зменшенням міцності емісійної поверхні. Емісійна картина була теж значною мірою розупорядкованою. Розглянуті експериментальні факти дуже важко пояснювати виходячи з уявлень про вплив магнітного поля на електронну підсистему металу [89, 90, 91], насамперед, з-за значної інерційності виявленого ефекту. Їх характерний час (до хвилин при малих густинах струму) значно перевищує всі часові інтервали, обумовлені електронними взаємодіями. До того ж, із теорії [89, 90, 91] випливає, що емісійний струм мав би зменшуватися, що спостерігалося лише в поодиноких випадках.

У роботі [101] була запропонована модель для пояснення механізму зростання польового емісійного струму в магнітному полі, виходячи з уявлень про вплив магнітного поля на пластичні властивості металів в умовах протікання струмів високої густини. Відповідно до [101], підвищення пластичності металу деформації вершини емітера під дією призводить до розтягувальних пондермоторних напруг, прикладених до неї. При цьому емітер «загострюється» – зменшується радіус кривизни вершини і утворюється перетяжка, що викликає зростання емісійного струму (через збільшення фактору підсилення поля) і збільшення розмірів емісійної картини, яка спостерігалась в експериментах.

Впливу магнітного поля на передпробійні ефекти у прискорювальній техніці присвячена і робота [102]. У даній праці автори розглядають електрони, що емітують під впливом електричного поля та прискорюються і фокусуються магнітним полем на іншій стороні резонатора, нагріваючи його поверхню. Цей процес може викликати плавлення, випаровування і утворення плазми, що призводить до пробою.

Польову емісію зі стінок плоского резонатора у присутності зовнішнього магнітного поля розглянуто в [103]. У цій роботі показано, що електрони, які емітують з нерівностей поверхні, фокусуються магнітним полем у невеликих точках у певному іншому місці резонатора нагріваючи поверхню.

Теоретичні дослідження впливу магнітного поля, паралельного поверхні, на струм, були виконані в [104]. Слід підкреслити, що електрони, емітовані з поверхні металу, повертатимуться назад при достатній величині індукції магнітного поля. У результаті це має зменшити ймовірність пробою та підвищити стійкість

прискорювальних структур. Величину відсікаючого магнітного поля можна знайти за формулою [105]:

$$B_{H} = \sqrt{\frac{2mU}{ed^{2}} + \left(\frac{m\nu_{0}}{ed}\right)^{2}},$$
(1.4)

де m – маса електрона, U – напруга між електродами, e – заряд електрона, d – відстань між електродами,  $v_0$  – початкова швидкість електрона. Тому «вимкнення» струму польової емісії за допомогою зовнішнього магнітного поля, паралельного до поверхні металу, є можливим способом боротьби з високовакуумними високоградієнтними пробоями.

У роботах [106, 107, 108] автори обговорюють можливість запобігання виникненню ушкоджень, що утворюються на поверхні, шляхом створення прискорювальних структур так, щоб всі високоградієнтні поверхні були паралельні до зовнішнього магнітного поля. Замість фокусування електронів поле буде повертати їх з меншою енергією в місця їх емісії. У роботах [109, 110] чисельно та [111, 112] експериментально було показано, що при використанні магнітного поля, паралельного до стінок ВЧ-структури, механічне пошкодження поверхні, викликане польовою емісією, може бути адекватно пригнічене.

Крім того були проведені експерименти й з вивчення впливу на швидкість виникнення пробою (BDR) [113] та на повний емісійний струм відносно слабкого постійного магнітного поля (на порядок меншого, ніж відсікаюче магнітне поле  $B_H$ ) [114]. Автори цих робіт вказали на відсутність чіткого результату та необхідність подальшого вивчення впливу магнітного поля.

Таким чином, експериментальні результати щодо дослідження впливу магнітного поля на високоградієнтний високовакуумний пробій, в цілому, суперечливі та у низці випадків не підтверджують теоретичних висновків та узагальнень, а отже, потребують більш детального вивчення.

### Висновки до Розділу 1

Проведений огляд літератури показує, що, незважаючи на велику кількість досліджень процесів польової емісії у відсутності магнітного поля та при його наявності, дослідження процесу тунелювання електрона крізь потенціальний бар'єр на межі метал-вакуум залишаються актуальними. Зокрема, процес проходження електрона крізь потенціальний бар'єр у випадку присутності магнітного поля, паралельного поверхні металу, недостатньо досліджений теоретично, крім того не було проведено детальних досліджень впливу магнітного поля довільної конфігурації на зміну форми потенціального бар'єру. У той же час, вплив магнітного поля на польову емісію електронів може грати одну з ключових ролей у підвищенні стійкості прискорювальних структур до високовольтного високовакуумного пробою, що теж раніше не було досліджено.

Варто відзначити, що у попередніх роботах не було розглянуто вплив релятивістських ефектів на процес тунелювання електронів крізь потенціальний бар'єр у випадку високих напруг при відносно великих міжелектродних відстанях, внаслідок чого рух електрона стає релятивістським.

У даній роботі розглянуто вплив магнітного поля, паралельного поверхні металу, на коефіцієнт проходження потенціального бар'єру та виконано релятивістське узагальнення теорії польової емісії електронів методами квантової теорії поля.

### РОЗДІЛ 2

## КВАНТОВО-МЕХАНІЧНИЙ РУХ ЕЛЕКТРОНА В ЕЛЕКТРИЧНОМУ ТА МАГНІТНОМУ ПОЛЯХ

Оскільки явище виникнення польової емісії електронів на межі металвакуум під впливом зовнішнього електричного поля є квантовим ефектом, пов'язаним з проникненням електрона крізь потенціальний бар'єр, коли його енергія менша за висоту потенціального бар'єру, для розгляду впливу присутності зовнішнього магнітного поля на цей процес необхідно, передусім, дослідити квантово-механічний рух електрона у новій конфігурації електромагнітних полів. Таким чином у цьому розділі розглянуто вільний рух електрона в присутності різних можливих конфігурацій постійних та однорідних електричного та магнітного полів.

# 2.1 Рух електрона в зовнішніх паралельних електричному та магнітному полях



Рисунок 2.1. Конфігурація електричного та магнітного полів.
Спочатку розглянемо рух електрона в паралельних електричному та магнітному полях, декартові координати яких, згідно з рис. 2.1, мають наступні значення [115]:

$$\vec{E}(0,E,0), \ \vec{B}(0,B,0), \ \vec{A}(0,0,-B),$$
 (2.1)

де  $\vec{E}$  – напруженість електричного поля,  $\vec{B}$  – індукція магнітного поля,  $\vec{A}$  – векторний потенціал магнітного поля, так що  $rot(\vec{A}) = \vec{B}$ .

Вихідним рівнянням для поставленої задачі є рівняння Шрьодінгера для хвильової функції електрона в таких полях  $\psi(x, y, z, t)$ :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi, \qquad (2.2)$$

де оператор Гамільтона  $\hat{H}$  має відомий вигляд [115]:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left( \vec{p} + e\vec{A} \right)^2 + U,$$
 (2.3)

де 
$$\vec{p} = \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)$$
 – оператор імпульсу електрона,  $U(y) = eEy$  –

потенціальна енергія електрона в зовнішньому постійному однорідному електричному полі, *ћ* – постійна Планка, *–е* – заряд електрона, *m* – маса електрона.

Оскільки при постійних електричному та магнітному полях (2.1) ми маємо стаціонарний випадок (оператор Гамільтона системи не залежить явно від часу), то хвильова функція електрона має вигляд:

$$\psi(x, y, z, t) = \overline{\psi}(x, y, z) exp\left(-\frac{i\varepsilon t}{\hbar}\right),$$
 (2.4)

де *є* є можливим спектром енергій електрона, який знаходиться в суперпозиції електричного та магнітного полів (2.1).

Враховуючи (2.1-2.3), рівняння Шрьодінгера для хвильової функції (2.2) було записане в такому вигляді:

$$\left\{\frac{1}{2m}\left[-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}-eBx\right)^2\right]+eEy\right\}\overline{\psi}=\varepsilon\overline{\psi}.$$
(2.5)

Як видно з (2.5), оператор Гамільтона електрона, що рухається в заданій конфігурації полів (2.1), явно не залежить від координати *z*.

Враховуючи цю обставину, маємо:

$$\left\{\hat{H}, p_z\right\} \equiv \hat{H} p_z - p_z \hat{H} = 0, \quad p_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}, \quad (2.6)$$

тобто оператор *z*-тої проекції імпульсу комутує з гамільтоніаном. Звідси слідує, що проекція імпульсу електрона на *p<sub>z</sub>* є інтегралом руху.

Завдяки цьому, просторову складову хвильової функції електрона можна шукати у вигляді:

$$\overline{\psi}(x, y, z) = exp\left(+\frac{ip_z z}{\hbar}\right) \widetilde{\psi}(x, y).$$
(2.7)

Підставляючи вираз (2.7) в (2.5), для  $\tilde{\psi}(x, y)$  отримуємо диференціальне рівняння в частинних похідних:

$$\left\{\frac{1}{2m}\left[-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\left(p_z-eBx\right)^2\right]+eEy\right\}\tilde{\psi}=\varepsilon\tilde{\psi}.$$
(2.8)

Гамільтоніан рівняння (2.8) можна записати у вигляді суми двох операторів, які діють на різні змінні:

$$\hat{H}(x,y) = \hat{H}_{x}(x) + \hat{H}_{y}(y),$$
 (2.9)

$$\hat{H}_{x}(x) = \frac{\hbar^{2}}{2m} \left[ -\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} + \left( p_{z}z - eBx \right)^{2} \right], \qquad (2.10)$$

$$\hat{H}_{y}(y) = -\frac{\hbar^{2}}{2m} \frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}} + eEy.$$
(2.11)

Таким чином, рівняння (1.8) для хвильової функції електрона може бути представлене у вигляді:

$$\left\{\hat{H}_{x}(x)+\hat{H}_{y}(y)\right\}\tilde{\psi}(x,y)=\varepsilon\tilde{\psi}(x,y).$$
(2.12)

Приймаючи до уваги адитивний характер оператора Гамільтона, хвильову функцію  $\tilde{\psi}(x, y)$  шукаємо у вигляді добутку двох функцій, які залежать окремо від однієї координати *x* або *y*:

$$\tilde{\psi}(x, y) = X(x)Y(y). \tag{2.13}$$

Після підстановки (2.12) в (2.13) отримуємо наступне рівняння:

$$f_1(x) + f_2(y) = \varepsilon, \quad \frac{x\varepsilon(-\infty, +\infty)}{y\varepsilon(-\infty, +\infty)},$$
(2.14)

де введені такі позначення:

$$f_1(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{\left(p_z - eBx\right)^2}{2m},$$
(2.15)

$$f_2(y) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + eEy.$$
(2.16)

Оскільки рівність (2.14) повинна мати місце на всій площині (x, y), то функції  $f_1(x)$  та  $f_2(y)$  можуть бути лише постійними величинами:

$$\begin{cases} f_1(x) = \varepsilon_x, \\ f_2(y) = \varepsilon_{y_y}, \\ \varepsilon_x + \varepsilon_y = \varepsilon \end{cases}$$
(2.17)

Таким чином, розв'язання диференціального рівняння в частинних похідних (2.8) зводиться до розв'язування системи двох незалежних диференціальних рівнянь у звичайних похідних:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \left[\frac{2m\varepsilon_x}{\hbar^2} - \frac{\left(p_z - eBx\right)^2}{\hbar^2}\right] X = 0, \qquad (2.18)$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + \left[\frac{2m\varepsilon_y}{\hbar^2} - \frac{2meEy}{\hbar^2}\right]Y = 0.$$
(2.19)

Після введення нових незалежних змінних  $x' = x - \frac{p_z}{eB}, y' = y - \frac{\varepsilon_y}{eE}$ рівняння (2.18) та (2.19) буде мати вигляд:

$$\frac{d^2 X}{dx'^2} + \left[\frac{2m\varepsilon_x}{\hbar^2} - \frac{e^2 B^2 x'^2}{\hbar^2}\right] X = 0, \qquad (2.20)$$

$$\frac{d^2Y}{dy'^2} - \frac{2meE}{\hbar^2} y'Y = 0.$$
 (2.21)

41

Після введення безрозмірних координат  $\xi, \eta$  згідно зі співвідношеннями:

$$a\xi = x', \ \xi = \left(x - \frac{p_z}{eB}\right) \left(\frac{eB}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.22}$$

$$b\eta = y', \ b = \left(\frac{\hbar^2}{2meE}\right)^{\frac{1}{3}}, \tag{2.23}$$

рівняння (2.20), (2.21) приймають вигляд:

$$\frac{d^2 X}{d\xi^2} + \left(\frac{2\varepsilon_x}{\hbar\omega_B} - \xi^2\right) X = 0, \qquad (2.24)$$

$$\frac{d^2Y}{dy'^2} - \eta Y = 0,$$
(2.25)

де 
$$\omega_{B} = \frac{eB}{m}$$
 – електронна циклотронна частота

Рівняння (2.24) є відомим рівнянням для функцій Ерміта та має обмежений розв'язок тільки при виконанні умови [116]:

$$\frac{2\varepsilon_x}{\hbar\omega_B} = 2n+1, \quad \varepsilon_x = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_B, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$
(2.26)

Розв'язком рівняння (2.25) є функції Ейрі [116]. Для постійної  $\varepsilon_y$  отримуємо наступне значення:

$$\varepsilon_{y} = \varepsilon - \varepsilon_{x} = \varepsilon - \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_{B}.$$
 (2.27)

Рівняння (2.25) за своїм виглядом співпадає з рівнянням Фаулера та Нордгейма, які вони використовували для знаходження коефіцієнта проникнення потенціального бар'єру за відсутності зовнішнього магнітного поля.

Враховуючи те, що  $\varepsilon - (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_B$  визначає складову енергії, яка пов'язана з рухом вздовж магнітного поля, з формули (2.25) випливає, що у випадку паралельних електричного та магнітного полів коефіцієнт проникнення електроном металу потенціального бар'єру дійсно не залежить від величини магнітного поля. Таким чином, строго доведено справедливість припущення Блатта, зроблене ним у роботі [89], про незалежність коефіцієнта проникнення електроном металу потенціального бар'єру на межі метал-вакуум від величини магнітного поля у випадку паралельних електричного та магнітного полів. До теперішнього часу ні теоретичних, ні експериментальних доведень цього припущення, ні експериментальних результатів у літературі не знайдено.

### 2.2 Рух електрона в зовнішніх взаємно перпендикулярних електричному та магнітному полях

У низці робіт [90, 94, 95, 96, 97, 99, 100], присвячених дослідженню впливу зовнішнього магнітного поля на густину струму польової емісії електронів із поверхні металів або напівпровідників припускалось без доказів, що один із найважливіших факторів при розв'язанні цієї задачі, а саме коефіцієнт проходження електроном металу чи напівпровідника потенціального бар'єру на межі метал-вакуум, не залежить від величини зовнішнього магнітного поля. У попередньому пункті доведено строго, що це припущення дійсно має місце, але тільки для окремого випадку колінеарності напрямів електричного та магнітного полів. У зв'язку з цим, постає питання про вплив магнітного поля на густину струму польової емісії електронів у більш загальному випадку, коли вектор напруженості електричного поля та вектор магнітної індукції неколінеарні.

Ця ситуація має місце в більшості проведених експериментів, якщо взяти до уваги форму поверхні електродів, поміж якими досліджується величина струму польової емісії. Найпростішим із цих випадків є випадок схрещених електричного та магнітного полів, коли кут між вектором напруженості електричного поля та вектором магнітної індукції становить 90<sup>0</sup>. Вирішення цього питання приводить нас до необхідності попереднього розгляду квантово-механічного руху електрона в такій конфігурації електричного та магнітного полів.

Першим кроком до розв'язання цієї задачі є розгляд квантово-механічного руху вільного електрона у вищезгаданій конфігурації електричного та магнітного полів, коли ці поля однорідні.

Як і в попередніх розділах, вихідним рівнянням для розв'язання цієї задачі є рівняння Шрьодінгера для хвильової функції електрона (2.2).



Рисунок 2.2. Конфігурація електричного та магнітного полів.

Для розв'язання задачі виберемо декартову систему координат, що зображена на рис. 2.2 та відповідні напрямки векторів напруженості електричного

поля  $\vec{E}$  та магнітної індукції  $\vec{B}$ , а також векторного потенціалу магнітного поля, який визначається з точністю до градієнта довільної скалярної функції:

$$\vec{E}(-E,0,0), \ \vec{B}(0,B,0), \ \vec{A}(0,0,-Bx), U(\vec{r}) = eEx.$$
 (2.28)

Оскільки оператор Гамільтона у задачі, що розглядається, не залежить від часу t, тому шукаємо стаціонарний розв'язок рівняння (2.2) для хвильової функції  $\psi(\vec{r},t)$  у вигляді (2.4).

Тоді, з урахуванням (2.28), отримуємо диференціальне рівняння в частинних похідних для хвильової функції електрона, яка залежить тільки від просторових координат:

$$\left\{\frac{1}{2m}\left[-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}-eBx\right)^2\right]-eEx\right\}\overline{\psi}=\varepsilon\overline{\psi}.$$
 (2.29)

Як видно з (2.29), у явний вигляд оператора Гамільтона не входять координати *y*, *z*, тобто ми маємо ситуацію, коли оператори компонентів імпульсу  $p_y$  та  $p_z$  комутують з оператором Гамільтона. Зважаючи на це, приходимо до висновку, що компоненти імпульсу  $p_y$ ,  $p_z$  є інтегралами руху і хвильову функцію шукаємо у вигляді:

$$\overline{\psi}(x, y, z) = exp\left[\frac{i}{\hbar}(p_{y}y + p_{z}z)\right]X(x), \qquad (2.30)$$

де X(x)- складова хвильової функції електрона, що описує рух електрона вздовж напрямку електричного поля. Враховуючи, що в задачі польової емісії електрони з металу вилітають вздовж ліній напруженості електричного поля  $\vec{E}$ , рух електронів здійснюється лише у площині xOz. Тому можна також записати, що у даному випадку компонента імпульсу  $p_y = 0$ .

Підставляючи хвильову функцію  $\overline{\psi}$  у вигляді (2.30) отримуємо диференціальне рівняння:

$$\left\{\frac{1}{2m}\left[-\hbar^2\frac{d^2}{dx^2} + \left(p_z - eBx\right)^2\right] - eEx\right\}X(x) = \varepsilon X(x). \quad (2.31)$$

Шляхом алгебраїчних перетворень та введення безрозмірної координати  $\xi = ax$  рівняння (2.31) може бути записане у вигляді:

$$\frac{d^2 X}{d\xi^2} + \left(\lambda - \xi^2\right) X\left(\xi\right) = 0, \qquad (2.32)$$

де введені позначення з таким фізичним змістом:  $x - x_0 = a\xi$ ,  $x_0 = \frac{1}{m\omega_B} \left( p_z + \frac{eE}{\omega_B} \right) - x$  – координата центру кола обертання електрона при класичному описі,  $a = \sqrt{h/(m\omega_B)}$  – одиниця масштабу вздовж вісі x,  $\omega_B = \frac{eB}{m}$  – ларморівська частота обертання електрона в магнітному полі,  $\lambda = \frac{2}{\hbar\omega_B} \left( \varepsilon - \frac{p_z^2}{2m} + \frac{m\omega_B^2 x_0^2}{2} \right)$  – параметр диференціального рівняння (2.32).

Рівняння (2.54) є відомим рівнянням для функцій Ерміта [115] і має обмежений розв'язок при таких значеннях параметра *λ*:

$$\lambda = 2n + 1, n = 0, 1, 2, \dots \tag{2.33}$$

Використовуючи (2.32) та (2.33), отримуємо спектр можливих значень енергії електрона, що рухається в схрещених однорідних електричному та магнітному полях:

$$\varepsilon_{n} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_{B} + \frac{p_{z}^{2}}{2m} - \frac{m \omega_{B}^{2} x_{0}^{2}}{2}.$$
 (2.34)

З метою фізичної інтерпретації спектра можливих значень енергії електрона в розглянутому випадку надамо (2.34) іншого вигляду, підставляючи в нього явний вираз для  $x_0$ .

Після простих алгебраїчних перетворень отримуємо:

$$\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_B + \frac{m\nu_d^2}{2} - eEx_{0,}$$
(2.35)

де  $v_d = \frac{E}{B}$  – швидкість дрейфового руху центра кола обертання електрона при класичному описі його руху.

Маючи вираз (2.35) для спектра енергії електрона, що рухається у взаємно перпендикулярних однорідних електричному та магнітному полях, маємо таку фізичну інтерпретацію окремих додатків виразу (2.35):

- $\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_{B}$  дискретний спектр значень енергії електрона, пов'язаний з поперечним до напрямку магнітного поля рухом електрона;
- <u>mv<sub>d</sub><sup>2</sup></u> енергія електрона, пов'язана з дрейфом його класичного центру
   ларморівської орбіти з дрейфовою швидкістю, що визначається
   значеннями зовнішнього електричного та магнітного полів;

*-eEx*<sub>0</sub> – потенціальна енергія електрона, що рухається в постійному однорідному електричному полі і визначається координатою центра кола ларморівського обертання електрона в магнітному полі.

Умовою справедливості отриманої формули для енергетичного спектру електрона, що рухається у взаємно перпендикулярних однорідних електричному та магнітному полях, є область нерелятивістського руху електрона, яка накладає обмеження на співвідношення між напруженістю електричного поля та магнітною індукцією у вигляді нерівності:

$$\frac{E}{B} \ll c. \tag{2.36}$$

Наведемо кінцевий результат знайденого вигляду хвильової функції електрона при його русі в схрещених однорідних електричному та магнітному полях:

$$\psi_n(x, y, z, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi 2^n n!}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) H_n(\xi) \exp\left[\frac{i}{\hbar}(p_z z - \varepsilon t)\right], \quad (2.37)$$

де  $H_n(\xi)$  – поліном Ерміта п-го порядку,  $\xi = \left(\frac{m\omega_B}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \left[x - \frac{p_z\omega_B + eE}{m\omega_B^2}\right].$ 

Отримані формули (2.35) та (2.37) узагальнюють результат Л. Д. Ландау [115] відносно характеристик квантово-механічного руху електрона на випадок, коли крім постійного однорідного магнітного поля, присутнє постійне однорідне електричне поле, та переходять в результати [115] при відсутності останнього.

# 2.3 Квантово-механічний рух електрона в зовнішніх електричному та магнітному полях при довільному куті між ними.

Для вирішення питання про квантово-механічний рух електрона в зовнішніх постійних і однорідних електричному  $\vec{E}$  та магнітному  $\vec{B}$  полях при довільному куті між ними виберемо декартову систему координат, зображену на рис. 2.3 з позначеними напрямками векторів напруженості електричного поля  $\vec{E}$  та магнітного поля  $\vec{B}$ .



Рисунок 2.3. Конфігурація електричного та магнітного полів.

Згідно з рис. 2.3, проекції напруженості електричного поля  $\vec{E}$ , магнітного поля  $\vec{B}$ , вигляд потенціалу  $\varphi(\vec{r})$ та потенціальної енергії електрона  $U(\vec{r})$  можуть бути записані в такому вигляді:

$$\vec{E}(-E\sin\alpha, -E\cos\alpha, 0), \vec{B}(0, B, 0), 
\varphi(x, y) = E(x\sin\alpha + y\cos\alpha), U(x, y) = -eE(x\sin\alpha + y\cos\alpha).$$
(2.38)

Вираз для векторного потенціалу магнітного поля, який визначається з точністю до градієнта довільної скалярної функції, виберемо у вигляді:  $\vec{A}(0,0,-Bx)$ .

Як і в попередніх пунктах, вихідним рівнянням руху електрона у вибраній суперпозиції електричного та магнітного полів є рівняння Шрьодінгера для хвильової функції електрона (2.2) [115], де оператор Гамільтона має наступний вигляд:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left[ -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} - eBx \right)^2 \right] - eE(xsin\alpha + ycos\alpha).$$
(2.39)

Як видно із явного виразу оператора Гамільтона (2.39), він не залежить явно від часу t, а тому хвильова функція електрона  $\psi(\vec{r},t)$  має стаціонарний вигляд (2.4).

Враховуючи (2.38) та (2.39) для складової хвильової функції електрона, яка залежить тільки від просторових координат  $\bar{\psi}(\vec{r})$ , отримуємо рівняння в частинних похідних:

$$\left\{\frac{1}{2m}\left[-\hbar^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}-\hbar^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}+\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}-eBx\right)^{2}\right]-eE\left(xsin\alpha+ycos\alpha\right)\right\}\times\overline{\psi}\left(\vec{r}\right)=\varepsilon\overline{\psi}\left(\vec{r}\right).$$
(2.40)

В оператор Гамільтона рівняння (2.40) не входить явно координата z, тому він комутує з оператором z-тої складової оператора імпульсу. Наслідком цього є те, що компонента імпульсу  $p_z$  є інтегралом руху, а хвильова функція  $\overline{\psi}(\vec{r})$  може бути записана у вигляді (2.7). Враховуючи (2.7), отримуємо диференціальне рівняння в частинних похідних для складової хвильової  $\tilde{\psi}(x, y)$ , котре описує рух електрона в площині (x, y):

$$\left\{\frac{1}{2m}\left[-\hbar^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}-\hbar^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}+\left(p_{z}-eBx\right)^{2}\right]-eE\left(xsin\alpha+ycos\alpha\right)\right\}\times\tilde{\psi}\left(x,y\right)=\varepsilon\tilde{\psi}\left(x,y\right).$$
(2.41)

Диференціальний оператор рівняння (2.41) являє собою алгебраїчну суму 2х операторів, кожний з яких залежить тільки від однієї координати *x* та *y*:

$$\hat{H}(x, y) = \hat{H}_{x}(x) + \hat{H}_{y}(y),$$
 (2.42)

$$\hat{H}_{x}(x) = \frac{1}{2m} \left[ -\hbar^{2} \frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} + \left( p_{z} - eBx \right)^{2} \right] - eExsin\alpha, \qquad (2.43)$$

$$\hat{H}_{y}(y) = -\frac{\hbar^{2}}{2m} \frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}} - eEycos\alpha, \qquad (2.44)$$

$$\hat{H}_{x}(x) + \hat{H}_{y}(y)\tilde{\psi}(x,y) = \varepsilon\tilde{\psi}(x,y).$$
(2.45)

Враховуючи адитивний характер оператора Гамільтона (2.45) по відношенню до залежності від координат *x* та *y*, хвильову функцію електрона  $\tilde{\psi}(x, y)$  шукаємо у вигляді добутку двох функцій, кожна з яких залежить тільки від однієї змінної:

$$\tilde{\psi}(x,y) = X(x)Y(y). \tag{2.46}$$

Підставляючи (2.46) у (2.45), отримуємо таке співвідношення:

$$\frac{\hat{H}_{x}(x)X(x)}{X(x)} + \frac{\hat{H}_{y}(y)Y(y)}{Y(y)} = \varepsilon, \quad \begin{array}{l} x \varepsilon(-\infty, +\infty) \\ y \varepsilon(-\infty, +\infty) \end{array}.$$
(2.47)

Виконання співвідношення (2.47) на площині (*x*, *y*) можливе лише за умови, що кожен із доданків (2.47) є постійною величиною. У результаті отримуємо два незалежних диференціальних рівняння:

$$\hat{H}_{x}(x)X(x) = \mathcal{E}_{x}X(x), \qquad (2.48)$$

$$\hat{H}_{y}(y)Y(y) = \varepsilon_{y}Y(y), \qquad (2.49)$$

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = \varepsilon \,. \tag{2.50}$$

Постійні величини  $\varepsilon_x$  та  $\varepsilon_y$  визначають спектри можливих значень енергії електрона, які пов'язані з його рухом вздовж осей *x* та *y*.

Таким чином, ми приходимо до явного вигляду двох диференціальних рівнянь (2.48) та (2.49), які мають вигляд задачі Штурма-Ліувілля, згідно з якою вимога обмеженості розв'язку дозволяє визначити спектри можливих значень енергій  $\varepsilon_x$  та  $\varepsilon_y$ .

Шляхом введення безрозмірної координати  $\xi$  згідно зі співвідношенням:

$$x - x_0 = x', \ x_0 = \frac{p_z}{m\omega_B} + \frac{eEsin\alpha}{m\omega_B^2},$$

$$x' = a\xi, \ a = \left(\frac{\hbar}{m\omega_B}\right)^{\frac{1}{2}},\tag{2.51}$$

$$\xi = \left(\frac{m\omega_B}{\hbar}\right)^{1/2} \left(x - \frac{p_z}{m\omega_B} - \frac{eEsin\alpha}{m\omega_B^2}\right),$$

де  $\omega_{B}$  – циклотронна частота обертання електрона по ларморівській орбіті в класичному випадку.

Для визначення функції  $X(\xi)$  отримуємо диференціальне рівняння квантового осцилятора:

$$\frac{d^2 X(\xi)}{d\xi^2} + \left(\tilde{\varepsilon}_x - \xi^2\right) X(\xi) = 0.$$
(2.52)

Стала  $\tilde{\varepsilon}_{x}$  в (2.52) визначається таким виразом:

$$\tilde{\varepsilon}_{x} = \frac{1}{\hbar\omega_{B}} \left[ 2\varepsilon_{x} + \frac{e^{2}E^{2}\sin^{2}\alpha}{m\omega_{B}} + \frac{2eE\sin\alpha}{m\omega_{B}} p_{z} \right].$$
(2.53)

Рівняння (2.52) являє собою, як вже зазначалося раніше, рівняння для квантового осцилятора, а його розв'язок виражається функціями Ерміта [115]. Вимога обмеженості розв'язку рівняння (2.52) приводить до дискретного ряду значень параметра $\varepsilon_x$ :

$$\tilde{\varepsilon}_{x} = (2n+1), n = 0, 1, 2, \dots$$
 (2.54)

Співвідношення (2.53), (2.54) визначають спектр можливих значень енергії, пов'язаної з рухом електрона у площині, перпендикулярній до напрямку магнітного поля.

Цій енергії можна надати вигляд:

$$\varepsilon_{x} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_{B} + \frac{m\omega_{d}^{2}}{2} - eEx_{0}, \qquad (2.55)$$

де  $v_d = \frac{E}{B} sin\alpha$  – швидкість дрейфу центру ларморівського кола електрона в суперпозиції електричного та магнітного полів за наявності кута  $\alpha$  між їхніми напрямками при класичному описі його руху.

Зупинимося на фізичному змісті окремих доданків у (2.55):

•  $\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_{B}$  – представляє дискретний ряд значень енергії електрона,

пов'язаної з його трансверсальним рухом відносно магнітного поля;

•  $\frac{mv_d^2}{2}$  – енергія електрона, пов'язана з дрейфом його класичного центру

ларморівської орбіти та визначається значеннями напруженості електричного та магнітного полів;

•  $-eEx_0$  – потенціальна енергія електрона, який рухається в постійному однорідному електричному полі та визначається *x*-координатою центра ларморівської орбіти електрона.

Наведемо явний вигляд тієї частини хвилевої функції електрона, яка описує його рух в площині, перпендикулярній магнітному полю:

$$\psi(x,z) = X(x)exp\left(\frac{ip_z z}{\hbar}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi 2^n n!}}exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)H_n(\xi)exp\left(\frac{ip_z z}{\hbar}\right), \quad (2.56)$$

де позначено:  $H_n(\xi)$  – поліном Ерміта *n*-го порядку.

Відмітимо, що наведені вище формули (2.52-2.56) у випадку  $\alpha = 0$  повністю співпадають зі значеннями, отриманими у пункті 2.2.

Рівняння (2.49), яке описує рух електрона вздовж магнітного поля, може бути приведене до вигляду:

$$\frac{d^2Y}{d\eta^2} - \eta Y = 0, \qquad (2.57)$$

де безрозмірна координата η пов'язана з координатою у наступним співвідношенням:

$$\eta = \left(\frac{2meEcos\alpha}{\hbar}\right)^{\frac{1}{3}} \left(y - \frac{\varepsilon_{y}}{eEcos\alpha}\right).$$
(2.58)

Розв'язок рівняння (2.57) відомий і виражається через функції Ейрі [115]:

$$Y(\eta) = A\Phi(\eta), \tag{2.59}$$

де  $\Phi(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\infty} \cos\left(\frac{u^3}{3} + un\right) du$ , A – константа, яка визначається із умов

нормування хвильової функції.

Відмітимо, що формули (2.57-2.58) у випадку  $\alpha = 90^{\circ}$  повністю співпадають зі значеннями, отриманими у пункті 2.1.

#### Висновки до Розділу 2

У даному розділі розглянуто вільний рух електрона за наявності різних можливих конфігурацій постійних і однорідних електричного та магнітного полів та отримано такі результати:

1. Розглянуто квантово-механічний рух електрона за наявності електричного та магнітного полів, коли вектори напруженості цих полів паралельні. При розв'язанні рівняння Шрьодінгера для хвильової функції електрона, показано, що його просторовий рух у напрямках електричного та магнітного полів не залежить від його руху в площині, перпендикулярній до напрямку магнітного поля. Знайдено можливий спектр енергії електрона, що знаходиться в такій конфігурації електричного та магнітного полів.

2. Показано, що коефіцієнт проникнення потенціального бар'єру електроном металу при паралельній орієнтації електричного та магнітного полів не

залежить від величини магнітного поля. Цим самим строго доведено припущення Блатта, зроблене у його статті [89], про незалежність коефіцієнта проходження електроном потенціального бар'єру у випадку колінеарності електричного та магнітного полів, на той час необґрунтоване ні теоретично, ні експериментально.

3. Розв'язана задача про квантово-механічний рух електрона у випадку взаємно перпендикулярних електричного та магнітного полів. Знайдено спектр можливих значень енергій електрона в цьому випадку та надано фізичну інтерпретацію окремих доказів знайденого енергетичного спектру. Як видно з форми диференціального рівняння (2.42), коефіцієнт проникнення електронів крізь бар'єр залежить в загальному випадку від магнітного поля. Показано, що даний підхід має обмеження на величину магнітного поля cB > E.

5. Розв'язана задача про квантово-механічний рух електрона в зовнішніх електричному та магнітному полях при довільному куті  $\alpha$  між ними. Знайдено енергетичний спектр електрона, який рухається в такій конфігурації полів, та пояснено фізичний зміст окремих складових цього спектру.

Основні положення цього розділу викладені у публікаціях автора [1-3].

#### РОЗДІЛ З

### РЕЛЯТИВІСТСЬКЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРІЇ ПОЛЬОВОЇ ЕМІСІЇ

У випадку міжелектродного проміжку порядку 1 см та напруженості зовнішнього електричного поля близько  $E = 100 \text{ MB}_{M}$  рух електрона стає релятивістським:  $\gamma = \frac{\varepsilon}{mc^2} \approx 2$ . Тому розрахунки коефіцієнту проходження потенціального бар'єру та відповідно струму польової емісії потребують доповнення, яке б враховувало релятивізм. Для знаходження хвильових функцій електрона, що рухається з релятивістськими швидкостями використано рівняння Клейна-Гордона замість рівняння Шрьодінгера. Використання рівняння Клейна-Гордона дає можливість врахувати не лише релятивістські ефекти, а й присутність зовнішнього однорідного магнітного поля, паралельного поверхні металу. При розв'язанні цього рівняння використовувались розв'язки, котрі передбачають нехтування спіном електрона.

### 3.1 Релятивістська поправка до струму польової емісії в рамках формалізму Фаулера-Нордгейма

Для описання тунелювання електрона крізь потенціальний бар'єр на межі метал-вакуум (x = 0) ми будемо використовувати прямокутну декартову систему координат з вектором напруженості електричного поля, напрямленим вздовж вісі x. Коефіцієнт проходження потенціального бар'єру знаходиться у вигляді:

$$D = \frac{|\mathbf{A}|^2 - |\mathbf{B}|^2}{|\mathbf{A}|^2},$$
(3.1)

де A і B – амплітуди падаючої та відбитої хвилі, у випадку, коли електрони знаходяться в металі (x < 0), при цьому хвильова функція електрона відома і приймає вигляд [117]:

$$\Psi_{I}(x) = A \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p_{1}x\right) + B \exp\left(\frac{i}{\hbar} p_{1}x\right).$$
(3.2)

Хвильові функції електрона у вакуумі (x > 0) в присутності електричного поля  $\vec{E} \parallel x$  задовольняють рівнянню Клейна-Гордона вигляду:

$$\left[\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-U(x)\right)^{2}+c^{2}\hbar^{2}\Delta-m^{2}c^{4}\right]\psi_{II}(x,t)=0,$$
(3.3)

де *U*(*x*) – скалярний потенціал електромагнітного поля. Компоненти напруженості електричного поля оберемо наступним чином:

$$\overline{E}(-E,0,0)$$

тоді форма електричного потенціалу буде  $\varphi(\vec{r}) = -Ex$ . Також позначимо висоту потенціального бар'єру у відсутності електричного поля через  $U_0$ . У такому випадку потенціальний бар'єр  $U(x) = U_0 - eEx$ . Ми будемо шукати розв'язок цього рівняння у стаціонарному стані:

$$\psi_{II}(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon t} \psi_{II}(x), \qquad (3.4)$$

де *є* – повна енергія електрона в електричному полі. Тоді, із врахуванням зазначеного вище рівняння (3.3) можна записати у вигляді:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\left(\varepsilon - U_0 + eEx\right)^2}{\hbar^2 c^2} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right] \psi_{II}(x) = 0.$$
(3.5)

Запишемо це рівняння у безрозмірних координатах:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + y + Ry^2\right] \psi_{II} = 0, \qquad (3.6)$$

$$\text{дe} \quad k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}, \quad \varepsilon = mc^2 + W, \quad x_0 = \frac{U_0 - W}{eE}, \quad y = \left(\frac{2meE}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}} \left(x - x_0\right), \quad R = \frac{1}{c^2} \left(\frac{eE\hbar}{4m^2}\right)^{\frac{2}{3}},$$

*W* – кінетична енергія електрона.

Рівняння Шрьодінгера, яке використовували Фаулер та Нордгейм [25] у безрозмірних координатах має вигляд:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + y\right]\psi_0 = 0.$$
(3.7)

Ми будемо використовувати підхід Фаулера та Нордгейма, тому нам необхідно, щоб виконувалась умова Ry << 1. Це означає, що для напруженості електричного поля, за якої польова емісія стає видима [25],  $E \simeq 10^8 \frac{B}{M}$  міжелектродна відстань повинна не перевищувати 1 см.

Тоді розв'язок рівняння (3.2) можна представити у вигляді:

$$\psi_{II} = \psi_0 + \psi_I \,, \tag{3.8}$$

де  $\psi_0$  – розв'язок рівняння Фаулера-Нордгейма [25]. Рівняння (3.2) можна записати у вигляді:

$$\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} + y \psi_0 + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + y \psi_1 + R y^2 (\psi_0 + \psi_1) = 0.$$
(3.9)

3 рівняння (3.3) ми знаємо, що:

$$\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} + y \psi_0 \equiv 0. \tag{3.10}$$

При цьому, з (3.1) відомо, що  $\psi_0 = \sqrt{y} H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right)$ . Тому, з врахуванням того

факту, що  $\psi_0 \gg \psi_1$  рівняння (3.5) можна переписати у вигляді:

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + y \psi_1 = f(y), \qquad (3.11)$$

де  $f(y) = -Ry^2 \psi_0$ .

Для розв'язання рівняння (3.7) скористаємось методом варіації параметрів. Розглянемо розв'язок рівняння  $\frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} + y\psi' = 0$ . Ми вже знаємо, що розв'язком цього рівняння буде [25]:

$$\psi' = \sqrt{y} H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right).$$

Тоді розв'язок рівняння (3.7) можна представити у вигляді:

$$\psi_1 = C_1(y)g_1(y) + C_2(y)g_2(y), \qquad (3.12)$$

де

$$g_1(y) = \sqrt{y} H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right),$$
$$g_2(y) = \sqrt{y} H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left(\frac{2}{3} i y^{\frac{3}{2}}\right)$$

є розв'язками однорідного диференціального рівняння.

Для знаходження  $C_1(y)$  і  $C_2(y)$  потрібно розв'язати систему:

$$\begin{cases} C_1'(y)g_1(y) + C_2'(y)g_2(y) = 0\\ C_1'(y)g_1(y)' + C_2'(y)g_2(y)' = f(y) \end{cases}$$
(3.13)

Легко бачити, що

$$C_{1}(y) = -\int \frac{g_{2}f(y)}{g_{1}(y)g_{2}'(y) - g_{2}(y)g_{1}'(y)}dy,$$

$$C_{2}(y) = \int \frac{g_{1}f(y)}{g_{1}(y)g_{2}'(y) - g_{2}(y)g_{1}'(y)}dy.$$
(3.14)

Розв'язок  $C_2(y)$  не задовольняє умову, що хвильова функція має представляти хвилю, що рухається праворуч (сходитись при великих *y*). Тому, розв'язком рівняння (3.7) буде:

$$\psi_{1} = \left(-\int \frac{g_{2}f(y)}{g_{1}(y)g_{2}'(y) - g_{2}(y)g_{1}'(y)}dy\right)\sqrt{y}H_{\frac{1}{3}}^{(2)}\left(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right).$$
(3.15)

Знайдемо явний вигляд  $C_1(y)$ . Для цього запишемо (3.11) із врахуванням(3.8):

$$C_{1} = \int \frac{\sqrt{y}H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left(\frac{2}{3}iy^{\frac{3}{2}}\right) \sqrt{y}H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right) Ry^{2}}{\sqrt{y}H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right) \left[\sqrt{y}H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left(\frac{2}{3}iy^{\frac{3}{2}}\right)\right] - \sqrt{y}H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left(\frac{2}{3}iy^{\frac{3}{2}}\right) \left[\sqrt{y}H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right)\right] + \sqrt{y}H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left(\frac{2}{3}iy^{\frac{3}{2}}\right) \left[\sqrt{y}H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left(\frac{2}{3}iy^{\frac{3}{2}}\right)\right] + \sqrt{y}H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left(\frac{2}{3}iy^{\frac{3}{2}}\right) \left[\sqrt{y}H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left(\frac{2}{3}i$$

Поділивши знаменник на чисельник, можна записати (3.12) у вигляді:

$$C_{1}(y) = \int \frac{Ry^{2} dy}{\left[ H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left( \frac{2}{3} i y^{\frac{3}{2}} \right) \right]'} \frac{\left[ H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left( \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right) \right]'}{H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left( \frac{2}{3} i y^{\frac{3}{2}} \right)} - \frac{\left[ H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left( \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right) \right]'}{H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left( \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right)}$$
(3.17)

Позначимо дроби у знаменнику наступним чином:

$$\frac{\left[H_{\frac{1}{3}}^{(2)}\left(\frac{2}{3}iy^{\frac{3}{2}}\right)\right]}{H_{\frac{1}{3}}^{(2)}\left(\frac{2}{3}iy^{\frac{3}{2}}\right)} = \alpha_{1} + i\beta_{1},$$

$$\frac{H_{\frac{1}{3}}^{(2)}\left(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right)}{\left[\frac{H_{\frac{1}{3}}^{(2)}\left(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right)\right]}} = \alpha_{2} + i\beta_{2}.$$

$$\frac{H_{\frac{1}{3}}^{(2)}\left(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right)}{H_{\frac{1}{3}}^{(2)}\left(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right)} = \alpha_{2} + i\beta_{2}.$$
(3.18)

За означенням функцію Ганкеля можна представити у вигляді [118]:

$$H_{\frac{1}{3}}^{(2)}(z) = \frac{i}{\sin\frac{\pi}{3}} \left\{ J_{-\frac{1}{3}}(z) - e^{\frac{\pi i}{3}} J_{\frac{1}{3}}(z) \right\}, \quad H_{\frac{1}{3}}^{(2)}(iz) = \frac{-1}{\sin\frac{\pi}{3}} \left\{ I_{-\frac{1}{3}}(z) - e^{\frac{\pi i}{3}} I_{\frac{1}{3}}(z) \right\}.$$
(3.19)

$$\alpha_{1} + i\beta_{1} = \sqrt{y} \frac{I'_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right) I_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{2} I'_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right) I_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right)}{\left| -\sin\frac{\pi}{3} H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right) \right|^{2}} + \frac{\left| -\sin\frac{\pi}{3} H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right) \right|^{2}}{\left| -\sin\frac{\pi}{3} H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right) \right|^{2}} + \frac{1}{\left| -\sin\frac{\pi}{3} H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right) \right|^{2}}{\left| -\sin\frac{\pi}{3} H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right) \right|^{2}} + \frac{1}{\left| -\sin\frac{\pi}{3} H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right) \right|^{2}} \right|^{2}}$$

$$+ i\sqrt{y} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \left( I'_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right) I_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right) - I'_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right) I_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right) \right|^{2}}{\left| \sin\frac{\pi}{3} H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right) \right|^{2}}$$

$$(3.20)$$

Для визначення  $\alpha_1$  ми можемо скористатись асимптотичними величинами і знайти, що  $\alpha_1 = \sqrt{y}$ . Тепер розглянемо  $\beta_1$ . Очевидно, що у чисельнику знаходиться Вронскіан функцій Бесселя [119]:

$$W\left\{I_{\frac{1}{3}}, I_{-\frac{1}{3}}\right\} = -\frac{2\sin\frac{\pi}{3}}{\pi\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\sqrt{3}}{\pi\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}}.$$
(3.21)

Для знаменника скористаємось асимптотичним наближенням [118]:

$$H_{\frac{1}{3}}^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i\left(z - \frac{5\pi}{12}\right)},$$
(3.22)

$$\left|\sin\frac{\pi}{3}H_{\frac{1}{3}}^{(2)}(z)\right|^{2} = \frac{3}{2\pi\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}}e^{\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}}.$$
(3.23)

Тоді,  $\beta_1$  буде дорівнювати:

$$\beta_1 = -\sqrt{y}e^{-\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}}.$$
(3.24)

Розглянемо  $\alpha_2$ і  $\beta_2$ :

$$\alpha_{2} + i\beta_{2} = \sqrt{y} \frac{J'_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right) J_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right) - \frac{1}{2} J'_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right) J_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right)}{\left| -i\sin\frac{\pi}{3}H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right) \right|^{2}} + \frac{J'_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right) J_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right) - \frac{1}{2} J'_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right) J_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right)}{\left| -i\sin\frac{\pi}{3}H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right) \right|^{2}} + \frac{J'_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right) J_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right) - \frac{1}{2} J'_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right) J_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right)}{\left| -i\sin\frac{\pi}{3}H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right) - J'_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right) J_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right)} + \frac{i\sqrt{y}}{\left| -i\sin\frac{\pi}{3}H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right) - J'_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right) J_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right)} \right|^{2}}{\left| \sin\frac{\pi}{3}H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right) \right|^{2}}$$

$$(3.25)$$

Для знаходження  $\alpha_2$  ми можемо скористатись асимптотичним наближенням функцій Бесселя. Легко переконатись, що  $\alpha_2 = 0$ . Розглянемо тепер $\beta_2$ . Очевидно, що у чисельнику знаходиться Вронскіан:

$$W\left\{J_{\frac{1}{3}}, J_{-\frac{1}{3}}\right\} = -\frac{2\sin\frac{\pi}{3}}{\pi z} = -\frac{\sqrt{3}}{\pi z}.$$
(3.26)

Для знаменника скористаємось асимптотичним наближенням:

$$H_{\frac{1}{3}}^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i\left(z - \frac{5\pi}{12}\right)},$$
(3.27)

$$\left|\sin\frac{\pi}{3}H_{\frac{1}{3}}^{(2)}(z)\right|^2 = \left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^2 \frac{2}{\pi z} = \frac{3}{2\pi z}.$$
 (3.28)

Підставивши (3.23) і (3.24) у вираз (3.22) отримаємо, що  $\beta_2 = -\sqrt{y}$ . Тепер ми можемо з достатньою точністю записати вираз для  $C_1(y)$ :

$$C_1(y) = R \int \frac{y^{\frac{3}{2}} dy}{1+i}.$$
 (3.29)

Підставимо цей вираз після інтегрування у формулу (3.11) та отримаємо явний вигляд хвильової функції  $\psi_1$ :

$$\psi_1 = \frac{Ry^3}{5} (1-i) H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right).$$
(3.30)

Пам'ятаючи, що  $\psi = \psi_0 + \psi_1$  запишемо отриману хвильову функцію електрона в вакуумі:

$$\psi_{II} = \sqrt{y} H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right) \left[1 + \frac{R y^{\frac{5}{2}}}{5} (1-i)\right].$$
(3.31)

Для «зшивки» хвильових функцій на межі метал-вакуум використаємо умову неперервності хвильової функції: у будь-який момент часу хвильова функція має бути неперервною функцією просторових координат. Крім того, неперервними мають бути також частинні похідні. Проведемо «зшивку» на межі метал-вакуум (точка x = 0), тоді:

$$\begin{cases} \psi_{I}(0) = A + B \\ \psi_{II}(0) = \left(\frac{U_{0} - W}{F}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi i}{2}} \left(k^{2} e E\right)^{\frac{1}{6}} H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left(\frac{2}{3} e^{-\frac{3\pi i}{2}} k \sqrt{e E} \left(\frac{U_{0} - W}{e E}\right)^{\frac{3}{2}}\right), \quad (3.32) \\ \times \left[1 + e^{-\frac{5\pi i}{2}} \left(k^{2} e E\right)^{\frac{5}{6}} \left(\frac{U_{0} - W}{e E}\right)^{\frac{5}{2}} \frac{R(1 + i)}{5}\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{d\psi_{I}}{dx}\right)_{0} = -A + B \\ \left(\frac{d\psi_{I}}{dx}\right)_{0} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{U_{0} - W}{eE}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi i}{2}} \left(k^{2} e E\right)^{\frac{1}{6}} H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left(\frac{2}{3} e^{-\frac{3\pi i}{2}} k \sqrt{eE} \left(\frac{U_{0} - W}{eE}\right)^{\frac{3}{2}}\right) - \\ \frac{U_{0} - W^{\frac{1}{2}}}{eE} \left(k^{2} e E\right)^{\frac{1}{6}} k \left(U_{0} - W\right) H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left(\frac{2}{3} e^{-\frac{3\pi i}{2}} k \sqrt{eE} \left(\frac{U_{0} - W}{eE}\right)^{\frac{3}{2}}\right) \end{bmatrix} \times \\ \times \left[1 + e^{-\frac{5\pi i}{2}} \left(k^{2} e E\right)^{\frac{5}{6}} \left(\frac{U_{0} - W}{eE}\right)^{\frac{5}{2}} \frac{R(1 + i)}{5}\right] + \\ \frac{R(1 - i)}{2} \left(\frac{U_{0} - W}{eE}\right)^{2} \left(k^{2} e E\right) H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left(\frac{2}{3} e^{-\frac{3\pi i}{2}} k \sqrt{eE} \left(\frac{U_{0} - W}{eE}\right)^{\frac{3}{2}}\right) \right]. \tag{3.33}$$

Введемо позначення:

$$\frac{2}{3} \left( k^2 e E \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{U_0 - W}{e E} \right)^{\frac{3}{2}} = Q \,.$$

Оскільки Q є дійсним і великим ми можемо записати:

$$H_{\frac{1}{3}}^{(2)}\left(e^{-\frac{3\pi i}{2}}Q\right) = e^{\frac{3\pi i}{2}}\frac{dH_{\frac{1}{3}}^{(2)}}{dQ}\left(e^{-\frac{3\pi i}{2}}Q\right).$$

Рівняння неперервності хвильової функції (3.28-3.29) можна записати у вигляді:

$$A + B = W^{\frac{1}{4}} \left(\frac{U_0 - W}{eE}\right)^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left(e^{-\frac{3\pi i}{2}}Q\right) \left[1 - \frac{R(1+i)}{5} \left(k^2 eE\right)^{\frac{5}{6}} \left(\frac{U_0 - W}{eE}\right)^{\frac{5}{2}}\right]$$
(3.34)

$$-A+B = \frac{i}{kW^{\frac{1}{4}}} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{U_0 - W}{eE} \right)^{-\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left( e^{-\frac{3\pi i}{2}} Q \right) + \left( \frac{U_0 - W}{eE} \right) k\sqrt{eE} \frac{dH_{\frac{1}{3}}^{(2)}}{dQ} \left( e^{-\frac{3\pi i}{2}} Q \right) \right] \times$$

$$\times \left[ 1 + e^{-\frac{\pi i}{2}} \frac{R(1-i)}{5} \left( k^2 eE \right)^{\frac{5}{6}} \left( \frac{U_0 - W}{eE} \right)^{\frac{5}{2}} \right] + \frac{1}{kW^{\frac{1}{4}}} \frac{R(1-i)}{2} \left( \frac{U_0 - W}{eE} \right)^2 \left( k^2 F \right)^{\frac{5}{6}} H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left( Q \right).$$
(3.35)

За означенням функції Ганкеля ми можемо виразити  $H_{\frac{1}{3}}^{(2)}\left(e^{-\frac{3\pi i}{2}}Q\right)$  через дійсну функцію  $I_{\frac{1}{3}}(Q)$  через таку рівність:

66

$$H_{\frac{1}{3}}^{(2)}\left(e^{-\frac{3\pi i}{2}}Q\right) = \frac{-1}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}\left(I_{-\frac{1}{3}}(Q) + e^{\frac{\pi i}{3}}I_{\frac{1}{3}}(Q)\right).$$
(3.36)

Запишемо, що

$$\alpha + i\beta = \frac{I'_{-\frac{1}{3}}(Q) + e^{\frac{\pi i}{3}}I'_{\frac{1}{3}}(Q)}{I_{-\frac{1}{3}}(Q) + e^{\frac{\pi i}{3}}I_{\frac{1}{3}}(Q)},$$
(3.37)

де  $\alpha i \beta \epsilon$  дійсними числами. Тепер ми можемо записати коефіцієнт проходження електронами потенціального бар'єру на межі метал-вакуум під впливом зовнішнього електричного поля з врахуванням релятивістських поправок. Тоді, розв'язуючи (3.30-3.31) та використовуючи (3.32-3.33) ми знаходимо:

$$D = \frac{4\beta \left(\frac{U_0 - W}{eE}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{eE} \left(1 - \frac{2}{5}R\left(k^2 eE\right)^{\frac{5}{6}} \left(\frac{U_0 - W}{eE}\right)^{\frac{5}{2}}\right)}{\left[\left\{W^{\frac{1}{4}} \left(\frac{U_0 - W}{eE}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{U_0 - W}{W^{\frac{1}{4}} \sqrt{eE}}\beta - \frac{R}{5kW^{\frac{1}{4}}}a\right\}^2 + \frac{1}{k^2W^{\frac{1}{2}}}b^2\right]}, \quad (3.38)$$

де

$$a = \left(k^2 e E\right)^{\frac{4}{3}} \left(\frac{U_0 - W}{e E}\right)^{\frac{7}{2}} (\alpha + \beta) + \frac{\left(k^2 e E\right)^{\frac{5}{6}} \left(\frac{U_0 - W}{e E}\right)^2}{2} + \left(k^2 e E\right)^{\frac{5}{6}} \left(\frac{U_0 - W}{e E}\right)^3 k W^{\frac{1}{2}}$$

$$b = \frac{1}{2} \left( \frac{U_0 - W}{eE} \right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{U_0 - W}{\sqrt{eE}} k\alpha + \frac{R \left( k^2 eE \right)^{\frac{5}{6}} \left( \frac{U_0 - W}{eE} \right)^3 kW^{\frac{1}{2}}}{5} \left( \left( \frac{U_0 - W}{eE} \right) kW^{\frac{1}{2}} - 3 \right)$$
$$- \frac{R}{5} \left( k^2 eE \right)^{\frac{4}{3}} \left( \frac{U_0 - W}{eE} \right)^{\frac{7}{2}} (\alpha - \beta).$$

Залишається розрахувати  $\alpha$  і  $\beta$ . Легко перевірити, що

$$\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\left(I'_{\frac{1}{3}}(Q)I_{-\frac{1}{3}}(Q) - I'_{-\frac{1}{3}}(Q)I_{\frac{1}{3}}(Q)\right)}{\left|\sin\frac{\pi}{3}H_{\frac{1}{3}}^{(2)}\left(e^{-\frac{3\pi i}{2}}Q\right)\right|^{2}}.$$
(3.39)

Чисельник (3.39) – це вронскіан рівняння Бесселя від уявного аргументу [119], і отримуємо

$$I'_{\frac{1}{3}}(Q)I_{-\frac{1}{3}}(Q) - I'_{-\frac{1}{3}}(Q)I_{\frac{1}{3}}(Q) = -\frac{2\sin\frac{\pi}{3}}{\pi Q}.$$
(3.40)

Для знаменника будемо використовувати асимптотичне наближення для великих *Q*. Тоді знаменник приймає форму:

$$\left|\sin\frac{\pi}{3}H_{\frac{1}{3}}^{(2)}\left(e^{-\frac{3\pi i}{2}}Q\right)\right|^2 \sim \frac{3}{4}\frac{2}{\pi Q}e^{2Q}.$$
 (3.41)

Отже,

$$\beta \sim e^{-2Q}$$
.

Для знаходження  $\alpha$  ми можемо також використовувати асимптотичні значення і знаходимо, що  $\alpha = 1$ . Розглядаючи знаменник (3.34) легко побачити, що доданки у яких відсутнє k є домінантними. Тому з достатньою точністю можемо записати:

$$D(W) = \frac{4e^{-\frac{4}{3}\left(k^{2}eE\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{U_{0}-W}{eE}\right)^{\frac{3}{2}}}\left(W\left(U_{0}-W\right)\right)^{\frac{1}{2}}}{U_{0}}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{5}\left(\frac{U_{0}-W}{mc^{2}}\right)^{\frac{5}{2}}\left(\frac{E_{s}}{E}\right)\right), \quad (3.42)$$

де 
$$E_s = \frac{{m_e}^2 c^3}{e\hbar}$$
 – швінгерівський ліміт.

Легко бачити, що вираз для коефіцієнта проходження потенціального бар'єру складається з двох частин. Перша частина є нічим іншим, як коефіцієнтом проходження, що отримали у роботі Фаулер та Нордгейм [25]. Друга ж частина виразу (3.38) є релятивістською поправкою до цього виразу. Тому, аналогічно до роботи [25] формулу для густини струму польової емісії можна записати у вигляді:

$$j = \frac{e^{3}}{4\pi^{2}\hbar} \frac{\mu^{\frac{1}{2}}}{(\varphi + \mu)\varphi^{\frac{1}{2}}} E^{2} e^{-\frac{4\sqrt{2m}\varphi^{\frac{3}{2}}}{\hbar}e^{\frac{2}{eE}}} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{5} \left(\frac{\varphi}{mc^{2}}\right)^{\frac{5}{2}} \left(\frac{E_{s}}{E}\right)\right), \quad (3.43)$$

де E – напруженість постійного електричного поля;  $\varphi$  – робота виходу;  $\mu$  – електрохімічний потенціал.

Окремо відзначимо, що перша частина (3.43) повністю співпадає із формулою (1.2), отриманою Фаулером та Нордгеймом [25]. Автори у своїй роботі [25] зазначають, що видима польова емісія електронів з металу починається за ефективної величини напруженості електричного поля порядку  $E = 10^9 \text{ B/}_{M}$ . Для оцінки релятивістської поправки використаємо величину усередненої роботи виходу електронів з металів порядку  $\varphi = 5 \text{ eB}$ . Тоді, величина релятивістської поправки буде мати порядок 0,011%.

# 3.2 Узагальнений на релятивістський випадок коефіцієнт проходження потенціального бар'єру

Знайдемо коефіцієнт проходження потенціального бар'єру у більш загальному випадку без накладання обмежень на міжелектродну відстань. Для цього, як і в попередньому випадку, будемо використовувати рівняння Клейна-Гордона (3.5) та ту ж саму конфігурацію поля. Введемо безрозмірну координату ξ відповідно наступним співвідношенням:

$$\frac{\xi}{\sqrt{2}} = \left(\frac{|e|E}{\hbar c}\right)^{1/2} \left(x + \frac{\varepsilon - U_0}{|e|E}\right), \quad a = \frac{m^2 c^3}{2\hbar |e|E}.$$
(3.44)

Тоді, рівняння Клейна-Гордона (3.5) можна записати у вигляді [117]:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\xi^2}{4} - a\right] \Psi_2(\xi) = 0.$$
(3.45)

Це рівняння є рівнянням параболічного циліндру [119]. Будемо шукати розв'язок рівняння (3.45), який представляє хвилю, що рухається праворуч при великих значеннях *x*. Тому, розв'язком рівняння (3.45) буде:

$$\Psi_{2}(\xi) = D_{-ia-1/2}\left(\xi e^{-\frac{\pi i}{4}}\right).$$
(3.46)

Для «зшивки» хвильових функцій на межі метал-вакуум використаємо умову неперервності хвильової функції та частинної похідної:

$$\begin{cases} \left. \psi_{1}(\xi) \right|_{x=0} = A + B \\ \left. \psi_{2}(\xi) \right|_{x=0} = D_{-0.5-ai} \left[ \sqrt{2}e^{-i\pi/4} \left( \frac{eE}{\hbar c} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\varepsilon - U_{0}}{eE} \right) \right], \end{cases}$$
(3.47)

$$\begin{cases} \left(\frac{d\psi_1(\xi)}{dx}\right)_{x=0} = i\frac{p_1}{\hbar}(A-B) \\ \left(\frac{d\psi_2(\xi)}{dx}\right)_{x=0} = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}\left(\frac{eE}{\hbar c}\right)^{\frac{1}{2}}D'_{-0.5-ai}\left[\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\left(\frac{eE}{\hbar c}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\varepsilon-U_0}{eE}\right)\right]. (3.48)\end{cases}$$

Для зручності, введемо позначення

$$Q = \left(\frac{\sqrt{2}(\varepsilon - U_0)}{\sqrt{\hbar c e E}}\right),$$

так щоб Q було дійсним числом. Тоді:

$$D'_{-0.5-ia} \left[ e^{-i\pi/4} Q \right] = e^{i\pi/4} \frac{dD_{-0.5-ia}}{dQ} \left[ e^{-i\pi/4} Q \right].$$
(3.49)

Тепер рівняння (3.47, 3.48) для у можна переписати у вигляді:

$$\begin{cases} A - B = -\sqrt{2} \frac{i\hbar}{p_1} \left(\frac{eE}{\hbar c}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{dD_{-0.5-ia}}{dQ} \left[e^{-i\pi/4}Q\right]. \\ A + B = D_{-0.5-ia} \left[e^{-i\pi/4}Q\right]. \end{cases}$$
(3.50)

Для зручності введемо наступне позначення:

$$\frac{\frac{d}{dQ}D_{-0.5-ia}\left[e^{-i\pi/4}Q\right]}{D_{-0.5-ia}\left[e^{-i\pi/4}Q\right]} = \alpha + i\beta, \qquad (3.51)$$

де α та β – дійсні числа.

Тоді квадрати модулів амплітуд падаючої та відбитої хвилі можемо записати наступним чином:

$$|A|^{2} = \left(\frac{\sqrt{2\hbar}}{2p_{1}}\left(\frac{eE}{\hbar c}\right)^{\frac{1}{2}}D_{-0.5-ia}\left[e^{-i\pi/4}Q\right]\right)^{2}\left(\alpha^{2}+\beta^{2}+\frac{p_{1}^{2}}{2\hbar^{2}}\frac{\hbar c}{eE}+\sqrt{2\beta}\frac{p_{1}}{\hbar}\left(\frac{\hbar c}{eE}\right)^{\frac{1}{2}}\right),$$

$$(3.52)$$

$$|B|^{2} = \left(\frac{\sqrt{2\hbar}}{2p_{1}}\left(\frac{eE}{\hbar c}\right)^{\frac{1}{2}}D_{-0.5-ia}\left[e^{-i\pi/4}Q\right]\right)^{2}\left(\alpha^{2}+\beta^{2}+\frac{p_{1}^{2}}{2\hbar^{2}}\frac{\hbar c}{eE}-\sqrt{2\beta}\frac{p_{1}}{\hbar}\left(\frac{\hbar c}{eE}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Коефіцієнт проходження потенціального бар`єру (3.1) приймає вигляд:

$$D_{rel} = \frac{|\mathbf{A}|^2 - |\mathbf{B}|^2}{|\mathbf{A}|^2} = \frac{2\sqrt{2\beta}\frac{p_1}{\hbar} \left(\frac{\hbar c}{eE}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{p_1^2}{2\hbar^2}\frac{\hbar c}{eE} + \sqrt{2\beta}\frac{p_1}{\hbar} \left(\frac{\hbar c}{eE}\right)^{\frac{1}{2}} + \beta^2 + \alpha^2}.$$
 (3.53)

Тепер залишилось визначити коефіцієнти α та β. Для цього використаємо співвідношення [118]:

$$E(a,Q) = \sqrt{2}e^{\pi a/2 + i/2(\pi/4 + \Phi)} D_{-0.5 - ia} \left[ e^{-i\pi/4}Q \right] = k^{-1/2} W(a,Q) + ik^{1/2} W(a,-Q), \quad (3.54)$$

де
$$\Phi = \arg\Gamma(\frac{1}{2} + ia), \ k = \sqrt{1 + \exp(2\pi a)} - \exp(\pi a),$$

W(a,Q) – функція параболічного циліндра Вебера, яка є дійсним числом. Тоді, легко показати, що

$$\alpha = \frac{\frac{1}{k}W'(a,Q)W(a,Q) + kW'(a,-Q)W(a,-Q)}{\left|\left(k^{-1/2}W(a,Q) + ik^{1/2}W(a,-Q)\right)\right|^2},$$
(3.55)

$$\beta = \frac{W'(a, -Q)W(a, Q) - W'(a, Q)W(a, -Q)}{\left| \left( k^{-1/2}W(a, Q) + ik^{1/2}W(a, -Q) \right) \right|^2}.$$
(3.56)

У чисельнику  $\beta$  знаходиться Вронскіан W $\{W(a,Q), W(a-Q)\}=1$  функції параболічного циліндра Вебера [118]. Тоді,  $\beta$  можна записати у вигляді:

$$\beta = \frac{1}{\left| \left( k^{-1/2} W(a, Q) + i k^{1/2} W(a, -Q) \right) \right|^2}.$$
(3.57)

У загальному випадку коефіцієнт проходження потенціального бар'єру (3.53) може бути знайдений лише чисельно. На рисунку 3.1 приведено графіки залежності коефіцієнта проходження потенціального бар'єру від напруженості електричного поля. При побудові графіків були використані формули для знаходження коефіцієнтів проходження без будь-яких спрощень.

Тут і в подальшому будемо використовувати наступні параметри польової емісії:

$$E \sim 10^9 \,\frac{B}{M}, \,\, \varphi \sim 5 \,eB, \qquad (3.58)$$

$$E \sim 10^{16} \frac{B}{M}, \ \varphi \sim 100 \ \kappa eB,$$
 (3.59)

де (3.58) – параметри польової емісії з металів у лабораторних умовах, (3.59) – параметри польової емісії з пульсарів [120, 121].



Рисунок 3.1. Залежність величини релятивістськи-узагальненого  $D_{rel}$  та отриманого Фаулером і Нордгеймом  $D_{F-N}$  коефіцієнтів проходження потенціального бар'єру від електричного поля при різних роботах виходу.

Легко побачити, що у випадку польової емісії з металів графіки майже співпадають. Величина релятивістської поправки у такому випадку буде становити < 0.1%. Звичайно, експериментально побачити такий вплив буде дуже важко,

враховуючи експоненціальне зростання густини струму польової емісії. У випадку полів близьких до швінгерівського ліміта  $E_s = \frac{m^2 c^3}{e\hbar} \simeq 1.32 \times 10^{18} \text{ B/M}$  і роботи виходу 100 кеВ відмінність складає >10 % і може вносити помітний внесок у густину струму.

Знайти простий аналітичний вираз для формули (3.53) можна у випадку, коли

$$\begin{cases} x_0 = \frac{A_e}{mc^2} << 1\\ L = \frac{A_e^2}{e\hbar Ec} \sim 1 \end{cases}$$
(3.60)

Використаємо асимптотичне наближення у цьому випадку для знаходження явного виду  $\alpha$  та  $\beta$ . Оскільки швінгеровське поле  $E_s \simeq 1.32 \times 10^{18} \frac{B}{M} \epsilon$  набагато більшим за лабораторні значення напруженостей електричного поля, то  $a = \frac{E_s}{2E} - \epsilon$  достатньо великим, тоді можна записати, що:

$$k = \sqrt{1 + \exp(2\pi a)} - \exp(\pi a) \approx 0,$$

$$\frac{1}{k} = \sqrt{1 + \exp(2\pi a)} + \exp(\pi a) \approx 2\exp(\pi a).$$
(3.61)

Вирази для *α* та *β* приймуть такий вигляд:

$$\alpha = \frac{\frac{1}{k}W'(a,Q)W(a,Q)}{\left|\left(k^{-1/2}W(a,Q)\right)\right|^2} = \frac{W'(a,Q)}{W(a,Q)},$$
(3.62)

$$\beta = \frac{1}{\left| \left( k^{-1/2} W(a,Q) + i k^{1/2} W(a,-Q) \right) \right|^2} = \frac{1}{\frac{1}{k} W(a,Q)^2}.$$
(3.63)

Скористаємось асимптотичним наближенням для W(a,Q), коли  $a \to +\infty$ ,  $-1 + \delta \leq \frac{Q}{2\sqrt{a}} \leq 1 - \delta$ . Тоді ми можемо записати функцію параболічного циліндра Вебера W(a,Q) та її похідну W'(a,Q) у вигляді [122]:

$$W\left(\frac{1}{2}\mu^{2},\mu t\sqrt{2}\right) \sim \frac{l(\mu)}{2^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{4}\pi\mu^{2}}} \frac{e^{\mu^{2}\eta}}{\left(1-t^{2}\right)^{\frac{1}{4}}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s}u_{s}(t)}{\left(1-t^{2}\right)^{\frac{3}{2}s}} \frac{1}{\mu^{2s}},$$
(3.64)

$$W'\left(\frac{1}{2}\mu^{2},\mu t\sqrt{2}\right) \sim \frac{\mu}{\sqrt{2}} \frac{l(\mu)e^{\mu^{2}\eta}}{2^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{4}\pi\mu^{2}}} \left(1-t^{2}\right)^{\frac{1}{4}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s}v_{s}(t)}{\left(1-t^{2}\right)^{\frac{3}{2}s}} \frac{1}{\mu^{2s}}.$$
(3.65)

У цих формулах використані наступні позначення [122]:

$$t = \frac{Q}{\sqrt{2\mu}}, \eta = \int_{t}^{1} (1 - t^{2})^{\frac{1}{2}} dt, l(\mu) \sim \frac{2^{\frac{1}{4}}}{\mu^{\frac{1}{2}}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{l_{s}}{\mu^{4s}}, l_{0} = 1, l_{1} = -\frac{1}{1152},$$

$$u_{0}(t) = 1, u_{1}(t) = \frac{t^{3} - 6t}{24}, v_{0}(t) = 1, v_{1}(t) = \frac{t^{3} + 6t}{24}, x_{0} = \frac{U - W}{mc^{2}}, L = \mu^{2}x_{0}^{2}.$$
(3.66)

Беручи до уваги, що  $\varepsilon = mc^2 + W$ , де *W* – кінетична енергія електрона,  $\mu = \sqrt{\frac{E_s}{E}}$ , запишемо чому дорівнюватимуть  $\alpha$  та  $\beta$ :

$$\alpha = \frac{\sqrt{2 - x_0}\sqrt{L}\sqrt{2}\left(24L\left(2 - x_0\right)^{3/2} + x_0^{7/2} - 3x_0^{5/2} + 9x_0^{3/2} - 7\sqrt{x_0}\right)}{96\left(\sqrt{x_0} - \frac{1}{2}x_0^{3/2}\right)L\sqrt{2 - x_0} + 2x_0^4 - 6x_0^3 - 6x_0^2 + 10x_0},$$
(3.67)

77

$$\beta = \frac{6 \cdot 48 \cdot 1152^2 \sqrt{x_0} \sqrt{2} L^{13/2} (2 - x_0)^{7/2} e^{\frac{1}{840} \frac{L\sqrt{2} (15x0^2 + 168x0 - 1120)}{\sqrt{x0^2}}}{(-x_0^4 + 24Lx_0^{3/2} \sqrt{2 - x_0} + 3x_0^3 - 48L\sqrt{x_0} \sqrt{2 - x_0} + 3x_0^2 - 5x_0)^2 (-x_0^4 + 1152L^2)^2}$$
(3.68)

У випадку, коли польова емісія електронів протікає у лабораторних умовах (3.58), параметри L і  $x_0$  приймуть наступні значення:  $x_0 \sim 10^{-5}$ , а  $L \sim 1$ . Коефіцієнт проходження потенціального бар'єру на границі метал-вакуум можна записати у наступному вигляді:

$$D_{rel} = D_{F-N} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{2}}{5} \frac{(U_0 - W)^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{mc^2} eE\hbar} + \frac{\sqrt{2}}{48} \frac{(7U_0 - 12W) eE\hbar}{U_0 \sqrt{m} (U_0 - W)^{\frac{3}{2}}} + \\ + \frac{1}{1536} \frac{(49U_0^2 - 216U_0W + 192W^2) e^2 E^2\hbar^2}{U_0^2 m (U_0 - W)^3} + \frac{1}{120} \frac{37U_0 - 79W + 12\frac{W^2}{U_0}}{mc^2} \end{pmatrix},$$
(3.69)

де

$$D_{F-N} = \frac{4\sqrt{U_0 - W}\sqrt{W}e^{-\frac{4}{3}\frac{(U_0 - W)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2m}}{\hbar eE}}}{U_0}.$$

*D*<sub>*F-N</sub></sub> - коефіцієнт* проходження потенціального бар'єру, отриманий Фаулером та Нордгеймом [25]. При цьому, звернемо увагу, що другий та третій доданки виразу,</sub>

які не містять у собі швидкості світла c, – доданки, що уточнюють вираз для коефіцієнта проходження потенціального бар'єра отриманий Фаулером та Нордгеймом і можуть бути отримані з їхніх розрахунків. Разом з тим, перший та останній доданки є суто релятивістськими та не можуть бути отримані в рамках підходу Фаулера та Нордгейма. Окремо відмітимо, що перший доданок повністю співпадає з результатом отриманим у попередньому параграфі.

Збільшення коефіцієнта проходження потенціального бар'єру у випадку польової емісії з металів (3.58) складає 0,015 %, а у випадку ж польової емісії з пульсарів (3.59) – 15 %, що узгоджується з рис. 3.1. Відмітимо, що у обох випадках умова (3.60) виконується. Можна зробити висновок, що в лабораторних умовах релятивістська поправка дає надзвичайно малий внесок і буде експериментально не помітною. Але у випадку польової емісії з пульсарів внесок її буде помітним і його необхідно враховувати при дослідженні явища польової емісії.

# 3.3 Ефект релятивістського стиснення потенціального бар'єру

Для пояснення отриманого ефекту підвищення коефіцієнту проходження потенціального бар'єру при врахуванні релятивізму розглянемо простішу задачу – проходження електрона крізь прямокутний потенціальний бар'єр у релятивістському випадку з потенціалами визначеними, як:

$$\begin{cases} U_I = 0\\ U_{II} = U_0.\\ U_{III} = 0 \end{cases}$$
(3.70)



Рисунок 3.2. Прямокутний потенціальний бар'єр на границі метал-вакуум.

Для кожної з трьох областей рівняння Клейна-Гордона може бути записане у вигляді (3.3). Розв'язками цих рівнянь є плоскі хвилі:

$$\psi_{I} = A_{I}e^{i\sigma x} + B_{I}e^{-i\sigma x}$$
  

$$\psi_{II} = A_{II}e^{\rho x} + B_{II}e^{-\rho x},$$
  

$$\psi_{III} = e^{i\sigma x}$$
  
(3.71)

де

$$\begin{cases} \sigma = \sqrt{\frac{W}{c^2 \hbar^2}} \left( 2mc^2 + W \right) \\ \rho = \sqrt{\frac{W - U_0}{c^2 \hbar^2}} \left( 2mc^2 + W - U_0 \right) \end{cases}$$
(3.72)

Відзначимо, що формули (3.33) співпадають з нерелятивістськими [115], але з коефіцієнтами (3.34). У випадку, коли в ІІІ області присутній лише рух електрона на нескінченність, коефіцієнт відбиття частинки від потенціального бар'єру приймає вигляд:

$$R = 1 - \left| \frac{B_I}{A_I} \right|^2. \tag{3.73}$$

Враховуючи (3.33) коефіцієнт відбиття *R* можемо записати наступним чином:

$$R = \frac{sh^{2}(\rho h)}{\cos^{2}(2y)sh^{2}(\rho h) + \sin^{2}(2y)ch^{2}(\rho h)},$$
(3.74)

де

$$\cos y = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \rho^2}},$$
$$\sin y = \frac{\rho}{\sqrt{\sigma^2 + \rho^2}},$$

*h* – ширина потенціального бар'єру.

Враховуючи значення  $\sigma$  і  $\rho$ , а також використовуючи формули подвійного аргументу синуса та косинуса можна записати їх значення, як:

$$\sin(2y) = \frac{2\sqrt{W(U_0 - W)}}{U_0},$$
(3.75)
$$\cos(2y) = \frac{2W - U_0}{U_0}.$$

Необхідно вказати, що вираз (3.36) співпадає з відомими нерелятивістськими значеннями (наприклад [115]). Тоді, враховуючи (3.37) рівняння (3.36) можна записати у більш відомій формі:

$$R = \frac{U_0^2(ch(2\rho h) - 1)}{U_0^2 ch(2\rho h) - 8W^2 + 8WU_0 - U_0^2}.$$
(3.76)

80

Вираз для коефіцієнту відбиття (3.38) співпадає з нерелятивістським коефіцієнтом з точністю до  $\rho$  [115]. Можна зробити висновок, що релятивістські ефекти знаходяться саме в цьому коефіцієнті. Тоді  $\rho$  можна переписати у вигляді:

$$\rho = \rho_{nonrel} \sqrt{1 - V^2/c^2} , \qquad (3.77)$$

$$\exists e \ \rho_{nonrel} \equiv \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (U_0 - W)}, \ V^2 = \frac{U_0 - W}{2m}.$$

Формулу для коефіцієнта відбиття (3.38) у загальному випадку можна представити у вигляді:

$$R(\rho h) = R(\rho_{nonrel}h_{rel}), \qquad (3.78)$$

де  $h_{rel} = h \sqrt{1 - V^2/c^2}$ .

Тобто коефіцієнт відбиття описується нерелятивістською формулою, а ширина потенціального бар'єру зменшується, оскільки  $h_{rel} < h$ . Даний ефект можна порівняти з лоренцовим стисненням ширини потенціального бар'єру. Оскільки товщина потенціального бар'єру зменшується, то коефіцієнт проходження, відповідно, зростає, що і пояснює отриманий ефект.

# 3.4 Вплив магнітного поля на коефіцієнт проходження потенціального бар'єру

Для знаходження хвильових функцій електрона в присутності перпендикулярних електричного та магнітного полів у випадку *E* > *cB* скористаємось рівнянням Клейна-Гордона:

$$\left[\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-U(x)\right)^{2}\right]\psi(x)=\left(\frac{c\hbar}{i}\nabla-eA\right)^{2}\psi(x)+m^{2}c^{4}\psi(x).$$
(3.79)

Ми будемо розглядати стаціонарний випадок, коли магнітне поле знаходиться лише у вакуумному проміжку. Тоді у випадку, коли електрони знаходяться в металі (E=0, U=0, B=0), хвильова функція прийме вигляд:

$$\psi_1(x) = F \exp\left(\frac{i}{\hbar} p_1 x\right) + G \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p_1 x\right).$$
(3.80)

Компоненти напруженості електричного поля та магнітної індукції оберемо наступним чином:  $\vec{E}(-E,0,0)$ ,  $\vec{B} = (0,B,0)$ , тоді форма електричного потенціалу буде  $\varphi(\vec{r}) = -Ex$ , а векторний потенціал оберемо у вигляді A = (0,0,-Bx). Тоді з урахуванням формули (3.79), рівняння (3.80) прийме вигляд:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2eBxp_2}{\hbar^2} - \frac{e^2B^2x^2}{\hbar^2} + \frac{(\varepsilon - U_0)^2 + 2(\varepsilon - U_0)eEx + e^2E^2x^2}{c^2\hbar^2} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\psi_2(x) = 0, (3.81)$$

де  $p_2$  – компонента імпульсу, що описує рух електрона вздовж магнітного поля. Запишемо це рівняння у безрозмірних координатах, враховуючи, що:

$$\frac{\zeta}{\sqrt{2}} = \left(\frac{e^2 \left(E^2 - c^2 B^2\right)}{c^2 \hbar^2}\right)^{\frac{1}{4}} \left(x - x_c\right),\tag{3.82}$$

де

$$x_{c} = -\frac{\left(\varepsilon - U_{0}\right)E}{e\left(E^{2} - c^{2}B^{2}\right)},$$

$$v = \frac{\left(\left(\varepsilon - U_{0}\right)E + Bc^{2}p_{2}\right)^{2}}{2ec\hbar\left(E^{2} - c^{2}B^{2}\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\left(\varepsilon - U_{0}\right)^{2}}{2ec\hbar\sqrt{E^{2} - c^{2}B^{2}}} + \frac{m^{2}c^{3} + p_{2}^{2}c}{2e\hbar\sqrt{E^{2} - c^{2}B^{2}}}.$$

Тоді, рівняння Клейна-Гордона для зовнішніх взаємно перпендикулярних електричного та магнітного полів можна записати у вигляді [117]:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} + \frac{\zeta^2}{4} - \nu\right] \psi_2(\zeta) = 0.$$
(3.83)

У випадку, коли B = 0 рівняння переходить у рівняння (3.45). Також рівняння (3.83) має аналогічний вигляд, тому в подальшому ми будемо використовувати ту саму логіку, що і в попередньому розділі. Розв'язок цього рівняння у безрозмірних координатах буде таким самим, як і у відсутності магнітного поля:

$$\Psi_2(\zeta) = D_{-1/2-i\nu}\left(\zeta e^{-\frac{\pi i}{4}}\right).$$
(3.84)

Для «зшивки» хвильових функцій на границі метал-вакуум використаємо умову неперервності хвильової функції та її похідної:

$$\begin{cases} \Psi_{1}(\zeta)|_{x=0} = F + G \\ \Psi_{2}(\zeta)|_{x=0} \Psi = D_{-1/2-i\nu} \left[ \sqrt{2}e^{-i\pi/4} \left( \frac{e^{2} \left( E^{2} - c^{2}B^{2} \right)}{c^{2}\hbar^{2}} \right)^{\frac{1}{4}} (x_{c}) \right], \end{cases}$$
(3.85)

$$\begin{cases} \left(\frac{d\psi_{1}}{dx}\right)_{x=0} = i\frac{p_{1}}{\hbar}(F-G) \\ \left(\frac{d\psi_{2}}{dx}\right)_{x=0} = \sqrt{2}e^{-i\pi/4} \left(\frac{e^{2}\left(E^{2}-c^{2}B^{2}\right)}{c^{2}\hbar^{2}}\right)^{\frac{1}{4}} D'_{-1/2-i\nu} \left[\sqrt{2}e^{-i\pi/4} \left(\frac{e^{2}\left(E^{2}-c^{2}B^{2}\right)}{c^{2}\hbar^{2}}\right)^{\frac{1}{4}} x_{0} \right]. (3.86) \end{cases}$$

Ми розглядатимемо одновимірний рух електронів в металі, тому компонента імпульсу  $p'_2 = 0$ . Враховуючи формули (3.85-3.86), отримаємо, що  $p_2 = 0$ . Для зручності, введемо позначення:

$$Q = \frac{\sqrt{2} \left(\varepsilon - U_0\right) E}{\sqrt{c\hbar e} \left(E^2 - c^2 B^2\right)^{3/4}},$$

так щоб Q було дійсним числом. Тоді отримаємо систему:

$$\begin{cases} F - G = -\sqrt{2} \frac{i\hbar}{p_1} \left( \frac{e^2 \left( E^2 - c^2 B^2 \right)}{c^2 \hbar^2} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{dD_{-1/2 - i\nu}}{dQ} \left[ e^{-i\pi/4} Q \right] \\ F + G = D_{-1/2 - i\nu} \left[ e^{-i\pi/4} Q \right] \end{cases}$$
(3.87)

Знайдемо квадрати модулів амплітуд враховуючи, що

$$\frac{\frac{d}{dQ}D_{-1/2-i\nu}\left[e^{-i\pi/4}Q\right]}{D_{-1/2-i\nu}\left[e^{-i\pi/4}Q\right]} = \lambda + i\delta,$$

де  $\lambda$  та  $\delta$  – дійсні числа:

84

$$|F|^{2} = \left(\frac{\sqrt{2\hbar}}{2p_{1}}\left(\frac{e^{2}\left(E^{2}-c^{2}B^{2}\right)}{c^{2}\hbar^{2}}\right)^{\frac{1}{4}}D_{-0.5-ib}\left[e^{-i\pi/4}Q\right]\right)^{2}$$

$$\times \left(\lambda^{2}+\delta^{2}+\frac{p_{1}^{2}}{2\hbar^{2}}\frac{c\hbar}{e\sqrt{\left(E^{2}-c^{2}B^{2}\right)}}+\sqrt{2\delta}\frac{p_{1}}{\hbar}\left(\frac{c^{2}\hbar^{2}}{e^{2}\left(E^{2}-c^{2}B^{2}\right)}\right)^{\frac{1}{4}}\right),$$

$$|G|^{2} = \left(\frac{\sqrt{2\hbar}}{2p_{1}}\left(\frac{e^{2}\left(E^{2}-c^{2}B^{2}\right)}{c^{2}\hbar^{2}}\right)^{\frac{1}{4}}D_{-0.5-ib}\left[e^{-i\pi/4}Q\right]\right)^{2}$$

$$\times \left(\lambda^{2}+\delta^{2}+\frac{p_{1}^{2}}{2\hbar^{2}}\frac{c\hbar}{e\sqrt{\left(E^{2}-c^{2}B^{2}\right)}}-\sqrt{2\delta}\frac{p_{1}}{\hbar}\left(\frac{c^{2}\hbar^{2}}{e^{2}\left(E^{2}-c^{2}B^{2}\right)}\right)^{\frac{1}{4}}\right).$$
(3.88)

Тоді коефіцієнт проходження потенціального бар`єру можна записати у вигляді:

$$D_{B} = \frac{|F|^{2} - |G|^{2}}{|F|^{2}} = \frac{2\sqrt{2}\delta \frac{p_{1}}{\hbar} \left(\frac{c^{2}\hbar^{2}}{e^{2}(E^{2} - c^{2}B^{2})}\right)^{\frac{1}{4}}}{\lambda^{2} + \delta^{2} + \frac{p_{1}^{2}}{2\hbar^{2}} \frac{c\hbar}{e\sqrt{(E^{2} - c^{2}B^{2})}} + \sqrt{2}\delta \frac{p_{1}}{\hbar} \left(\frac{c^{2}\hbar^{2}}{e^{2}(E^{2} - c^{2}B^{2})}\right)^{\frac{1}{4}}}.$$
(3.89)

Використовуючи співвідношення (3.55-3.56) можна отримати коефіцієнт проходження потенціального бар'єру на межі метал-вакуум у присутності зовнішнього магнітного поля паралельного поверхні у випадку, коли справедливо (3.58):

$$D_{B} = \frac{4\sqrt{U_{0} - W} \left(E^{2} - B^{2}c^{2}\right)^{3/4} E^{3/2} \sqrt{W}}{WE^{3} + \left(E^{2} - B^{2}c^{2}\right)^{3/2} \left(U_{0} - W\right)} \\ \times \exp\left(-\frac{4}{3} \frac{\sqrt{2} \left(E^{2} - 2\left(\frac{U_{0} - W}{mc^{2}}\right)c^{2}B^{2}\right) \sqrt{m} \left(U_{0} - W\right)^{3/2}}{E^{3}e\hbar}\right).$$
(3.90)

У випадку, коли *B* = 0 формула (3.90) переходить у коефіцієнт проходження потенціального бар'єру отриманий Фаулером та Нордгеймом у відсутності магнітного поля [25].



Рисунок 3.3. Залежність коефіцієнта проходження потенціального бар'єру від величини магнітного поля для різних значень роботи виходу.

На рисунку 3.3 зображено залежність коефіцієнта проходження потенціального бар'єру на межі метал-вакуум від величини індукції зовнішнього магнітного поля, паралельного поверхні металу. Ми бачимо, що при малих значеннях магнітного поля його вплив на коефіцієнт проходження незначний. Проте, зі зростанням індукції до величини  $B = \frac{E}{c}$  коефіцієнт проходження зменшується до нуля.

#### Висновки до розділу 3

У даному розділі розглянуто можливість врахування релятивістської поправки до густини струму польової емісії електронів з металу та впливу зовнішнього магнітного поля, паралельного поверхні металу, і отримано наступні результати:

1. Показано, що у випадку достатньо сильних електричних полів та відносно великих міжелектродних відстаней рух електрона в міжелектродному вакуумному проміжку може бути релятивістським, тому з'являється необхідність врахування релятивістської поправки до квантової теорії польової емісії Фаулера-Нордгейма [25].

2. Методом Фаулера-Нордгейма була отримана релятивістська поправка до формули густини струму польової емісії. У випадку міжелектродного проміжку меншого за 1 см, одержано аналітичний вираз для густини струму польової емісії електронів з урахуванням релятивістської поправки. Оцінка показала, що для усередненої роботи виходу електронів з металу порядку  $\varphi = 5 \text{ eB}$  та величини електричного поля, за якого польова емісія стає видимою ( $E = 1 \frac{\Gamma B}{M}$ ) величина релятивістської поправки буде мати порядок 0,011%.

3. Виконано узагальнення на релятивістський випадок рівняння польової емісії електронів. Знайдено загальний вираз коефіцієнту проходження потенціального бар'єру та наведено спрощену аналітичну формулу у для типових лабораторних параметрів. Показано, що збільшення коефіцієнта проходження потенціального бар'єру у випадку польової емісії з металів складає 0,015%. Цю формулу можна застосувати для обчислення польової емісії з полярного регіону

нейтронної зірки. У цьому випадку збільшення коефіцієнта проходженння складе близько 15 %.

4. Виконуючи узагальнення на релятивістський випадок коефіцієнту проходження прямокутного потенціального бар'єру, знайдено ефект релятивістського стиснення потенціального бар'єру на межі метал-вакуум. Під час зменшення ширини бар'єру збільшується коефіцієнт проходження, чим можна пояснити і отримане збільшення коефіцієнта проходження у випадку присутності електричного поля.

5. Знайдено загальний вигляд та спрощену аналітичну формулу коефіцієнту проходження потенціального бар'єру на межі метал-вакуум у випадку присутності зовнішнього магнітного поля, перпендикулярного електричному. Показано, що магнітне поле зменшить коефіцієнт проходження менше ніж на 0,015% для типових значень електричного та магнітного полів ( $E = 100 \text{ MB}_{M}$ , B = 0,33 Tл), що узгоджується з раніше отриманими результатами.

Результати досліджень даного розділу наведено у публікаціях [5-6].

#### РОЗДІЛ 4

# **ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ МАГНІТНОГО ПОЛЯ НА ПОЛЬОВУ ЕМІСІЮ ТА ІНШІ ПРОЦЕСИ В ВАКУУМНОМУ ПРОМІЖКУ**

## 4.1 Вступ

Відповідно до Меморандуму про наукове співробітництво між Інститутом прикладної фізики НАН України та ЦЕРН по програмі СLIC (2005 р.) та Доповненням до нього (2014 р.) були проведені експериментальні та теоретичні дослідження впливу магнітного поля на темновий струм та ймовірність виникнення високовакуумного високовольтного пробою. Експерименти проводились паралельно в лабораторіях Інституту прикладної фізики Національної академії наук України та Європейської організації з ядерних досліджень (ЦЕРН). За основу була взята ідея про можливість зменшення густини струму польової емісії та, відповідно, зменшення ймовірності виникнення пробою під впливом магнітного поля паралельного до поверхні електродів.

Вплив магнітного поля паралельного поверхні електродів на струм теоретично досліджувався в [104]. Автори відзначали, що електрони емітовані з поверхні металу повертатимуться назад при достатній величині індукції магнітного поля. Це в результаті має зменшити ймовірність пробою і збільшити стійкість прискорювальних структур. Величину відсікаючого магнітного поля (при якому струм між електродами припиняється) можна знайти за формулою (1.4). Використовуючи проектний прискорюючий градієнт майбутнього компактного лінійного прискорювача СLIС, що становить 100 МВ/м можна підрахувати, що для міжелектродної відстані у 100 мкм відсікаюче поле становить  $B_H = 3.4 \text{ Tл}$ , а для 10 мкм відповідно  $B_H = 10.7 \text{ Tл}$ . Тому «вимкнення» струму польової емісії за допомогою зовнішнього магнітного поля паралельного до поверхні металу є можливим способом боротьби з високовакуумними високоградієнтними пробоями.

У експериментах проведених в Інституті прикладної фізики та ЦЕРНі було розглянуто вплив малих (порядку долі  $B_H$ ) значень індукції зовнішнього магнітного поля паралельного поверхні металу на темновий струм та ймовірність виникнення високовакуумного високоградієнтного пробою.

Для дослідження впливу магнітного поля на ймовірність високовольтних пробоїв у ЦЕРНі була створена компактна вакуумна система, що містить два електрода з відносно великою площею поверхні для імпульсної системи постійного струму (Large Electrodes System). Доступна електрична схема дозволяє прикладати напругу з частотою 1 кГц. Детальний опис електричної схеми та принцип роботи можна знайти в [113]. Значення напруги, що прикладалась, обиралось вручну для забезпечення ймовірності пробоїв  $10^{-4} - 10^{-5} \left(\frac{кількість пробоїв}{кількість імпульсів}\right)$ . Вплив магнітного поля на ймовірність виникнення пробоїв було досліджено на установці Large Electrodes System [113] з міжелектродним проміжком 15 мкм для магнітного поля, паралельного поверхні електродів. Напруженість магнітного поля дорівнювала 0,5 Тл, а напруга дорівнювала 2,16 кВ, що відповідає напруженості електричного поля 144 МВ/м (без урахування коефіцієнта посилення).

У результаті проведених експериментів було відмічено, що деякі з отриманих даних, схоже, вказують на невелике збільшення ймовірності виникнення пробоїв через наявність магнітного поля. Проте немає середньої помітної різниці між ймовірністю виникнення пробоїв з магнітним полем та без нього.

В Інституті прикладної фізики НАН України дослідження впливу зовнішнього магнітного поля на струм польової емісії і величину напруги пробою проводилися на установці, описаній в роботі [123]. Для дослідження впливу магнітного поля на ймовірність високовольтних пробоїв була створена спеціальна магнітна система на базі самарій-кобальтових магнітів. Для посилення магнітного поля на вісі магнітної системи використовувалися конусні наконечникиконцентратори. Магнітне поле в області розрядного проміжку становило 0,33 Тл. Магнітна система розташовувалася на катоді таким чином, щоб досліджуваний зразок був розташований між полюсними наконечниками, а магнітне поле було орієнтоване паралельно поверхні. У всіх експериментах розрядний проміжок між катодом і анодом залишався фіксованим і становив 100 мкм. Значення напруги плавно збільшувалася, від 1 до 100 кВ. У процесі збільшення напруги на катоді вимірювалася величина темнового струму між катодом і анодом.

Експерименти, проведені на Інституті прикладної фізики НАН України, показали, що наявність магнітного поля призводить до зменшення напруги пробою на (10 ÷ 20) % для практично всіх зразків катоду, незалежно від способу обробки їх поверхні.

Для пояснення отриманих результатів були проведені теоретичні дослідження представлені у цьому розділі.

#### 4.2 Теоретичні дослідження впливу магнітного поля на вакуумний пробій

Лля дослідження впливу магнітного поля високовакуумний на високовольтний пробій необхідно детальніше розглянути процеси утворення струмів, які течуть у міжелектродному проміжку перед пробоєм. Методично високовакуумні пробої діляться на пробої при малих міжелектродних відстанях (десятки мікрометрів) та відносно невеликих напругах U < 20 кВ і при великих міжелектродних відстанях та напругах. У випадку малих проміжків високовакуумний пробій має такі стадії: польова емісія електронів з вістрів, що розташовані на поверхні катоду; польове випаровування металу; розігрівання вістря, виникнення плазми поблизу поверхні катоду; мікровибухи і пробій (arc burning) [124]. Для великих міжелектродних відстаней експериментальні результати показали, що напруга пробою відповідає степеневому закону, що пов'язує відстань між електродами у степені, що лежить між 0,5 і 0,7 (на відміну від порядку 1 у випадку невеликих проміжків) [73, 125]. Але повної теорії на даний час немає. Дослідники [124, 126] вказали на суттєву роль процесів у міжелектродному проміжку. Серед них – іонізація залишкових та дифузних газів, адсорбції, випаровування металів та бомбардування електродів прискореними іонами та електронами. Тому необхідно більш детально розглянути процеси та струми, що протікають в міжелектродному проміжку, для виявлення можливості впливу магнітного поля на високоградієнтний пробій.

Розглянемо складові потоку частинок, що протікає у міжелектродному проміжку перед пробоєм. Весь потік можна розділити на потік заряджених частинок і потік нейтральних частинок. Тоді потік заряджених частинок буде:

$$j_{dark} = j^{(-)} + j^{(+)} + j^{(-+)} + j^{add}, \qquad (4.1)$$

де  $j^{(-)}$  – струм з катоду,  $j^{(+)}$  – струм з аноду,  $j^{(-+)}$  – струм, що формується у міжелектродному проміжку (іонізаційний струм),  $j^{add}$  – додатковий струм, що виникає під дією інших зовнішніх факторів (космічне випромінювання і т.д.).

Потік нейтральних частинок можна записати у наступному вигляді:

$$j^{(0)} = j^{(0)}_{rest} + j^{(0)}_{desor} + j^{(0)}_{diff} + j^{(0)}_{T,avap} + j^{(0)}_{Ion,atom},$$
(4.2)

де  $j_{rest}^{(0)}$  – потік залишкових газів,  $j_{desor}^{(0)}$  – потік десорбованих атомів і молекул,  $j_{diff}^{(0)}$  – потік дифундованих атомів та молекул,  $j_{T,avap}^{(0)}$  – потік частинок, що випарувалися, внаслідок локального нагрівання електродів частинок,  $j_{lon,atom}^{(0)}$  – потік частинок, вибитих іонами, які бомбардують електроди. Перші три доданки можна зменшити підвищуючи вакуумні умови та ступінь очистки катодів і вакуумної камери. Останні два доданки виникають лише внаслідок протікання струмів між електродами.

Катодний струм складається зі струму польової емісії [25]  $j_{emis,e^-}^{(-)}$ , струму викликаного іонами, які бомбардують поверхню аноду  $j_{lon,bombar}^{(-)}$  та струму емітованих іонів з матеріалу катоду  $j_{emis,Me^-}^{(-)}$ . Отже,

$$j^{(-)} = j^{(-)}_{emis,e^-} + j^{(-)}_{Ion,bombar} + j^{(-)}_{emis,Me^-}.$$
(4.3)

Анодний струм можна записати так:

$$j^{(+)} = j^{(+)}_{emis,Me^+} + j^{(+)}_{e^-,bombar},$$
(4.4)

де  $j_{emis,Me^+}^{(+)}$  – струм емітованих позитивних іонів з аноду,  $j_{e^-,bombar}^{(+)}$  – струм частинок, які вивільняються внаслідок бомбардування поверхні аноду емітованими електронами.

Іонізаційний струм буде складатись зі струму утвореного атомами металу, які були іонізовані електронами у міжелектродному проміжку  $j_{e^-,Me^+}^{(-+)}$  і молекулами газу, який іонізується в міжелектродному проміжку (можлива як ударна іонізація, так і польова іонізація газу)  $j_{e^-,gas^+}^{(-+)}$ :

$$j^{(-+)} = j^{(-+)}_{e^-, Me^+} + j^{(-+)}_{e^-, gas^+}.$$
(4.5)

Легко бачити, що в формулах (4.1-4.5) найбільше значення приймає струм польової емісії електронів. Але інші доданки за рахунок великої маси іонів прискорених сильним електричним полем, можуть відігравати важливу роль у виникненні пробою. Наприклад, теорія Фаулера-Нордгейма, яка добре описує коефіцієнт проходження потенціального бар'єру [25], не залежить явно від виду емітованих частинок. Тому можна припустити, що електронний струм від катода та іонний струм від анода є однаковим. З рівності густин польових струмів електронів та іонів слідує співвідношення:

$$\frac{j_{Me^+}}{j_{e^-}} = \frac{\upsilon_{e^-}}{\upsilon_{Me^+}} = \sqrt{\frac{m_{e^-}}{m_{Me^+}}} \sim 10^{-3}, \qquad (4.6)$$

що співпадає з результатом [126]. Незважаючи на те, що іонний струм на три порядки менший, ніж електронний струм, це може призвести до руйнування. Іонне

бомбардування призводить до значного руйнування поверхні катода з можливістю подальшого формування лавиноподібного збільшення струму в міжелектродному проміжку.

Тому необхідно проаналізувати, як буде впливати зовнішнє магнітне поле паралельне поверхні катоду на польовий емісійний струм.

# **4.3** Вплив перпендикулярних електричного та магнітного полів на коефіцієнт проходження потенціального бар'єру та вакуумний пробій

Розглянемо явище польової емісії електронів у зовнішніх взаємно перпендикулярних електричному  $\vec{E}$  та магнітному  $\vec{B}$  полях.

Як і раніше, вихідним рівнянням для розв'язання цієї задачі є рівняння Шрьодінгера (2.2) для хвильової функції електрона, який знаходиться в суперпозиції таких полів. Згідно з обраною декартовою системою координат, компоненти напруженості електричного  $\vec{E}$  та магнітного  $\vec{B}$  полів, векторний потенціал магнітного поля  $\vec{A}$  та потенціальна енергія електрона в зовнішньому електричному полі з урахуванням потенціальної енергії взаємодії електрона зі своїм дзеркальним позитивним зображенням  $U(\vec{r})$  визначаються наступними значеннями:

$$\vec{E}(-E,0,0), \ \vec{B}(0,B,0),$$
(4.7)  
$$\vec{A}(0,0,-Bx), U(\vec{r}) = \left(U_0 - eEx - \frac{e^2}{4x}\right),$$

де величина  $U_0$  визначає висоту потенціального бар'єру на межі метал-вакуум.

Враховуючи (4.7), отримуємо диференціальне рівняння в частинних похідних для просторової частини хвильової функції  $\psi(\vec{r})$ :

$$\left\{\frac{1}{2m}\left[-\hbar^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}-\hbar^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}-\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}-eBx\right)^{2}\right]+\left[U_{0}-eEx-\frac{e^{2}}{4x}\right]\sigma(x)\right\}\overline{\psi}(x,y,z)=$$

$$=\varepsilon\overline{\psi}(x,y,z),$$
(4.8)

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0, & x < 0\\ 1, & x \ge 0 \end{cases}.$$
(4.9)

Як видно з (4.8), у явний вигляд оператора Гамільтона не входять координати у та  $\zeta$ , з чого слідує, що оператори компонент імпульсу  $p_y$  та  $p_z$  комутують з оператором Гамільтона. Таким чином, компоненти імпульсу  $p_y$  та  $p_z$  є інтегралами руху, що надає можливості шукати просторову частину хвильової функції  $\overline{\psi}(x, y, z)$  у вигляді (2.52). Підставляючи (2.52) в (4.8), отримуємо диференціальне рівняння для функції X(x) у звичайних похідних:

$$\left\{\frac{1}{2m}\left[-\hbar^2\frac{d^2}{dx^2}+p_y^2+\left(p_z-eBx\right)^2\right]+\left[U_0-eEx-\frac{e^2}{4x}\right]\sigma(x)\right\}X(x)=\varepsilon X(x).$$
(4.10)

Запишемо рівняння, що описує рух електрона через потенціальний бар'єр у присутності зовнішнього магнітного поля (4.10) в безрозмірних змінних:

$$\frac{d^{2}X}{d\xi^{2}} - k^{2}(\xi)X = 0, \quad (0 \le \xi < +\infty),$$

$$. \quad (4.11)$$

$$k^{2}(\xi) = C + \xi^{2} - \varepsilon_{z}\xi - \varphi\xi - \frac{\varphi_{m}}{\xi}.$$

Вигляд потенціального бар'єру (4.11) визначається наступними параметрами:

1) 
$$\varepsilon_z = 2 \left( \frac{p_z^2}{m \hbar \omega_B} \right)^{\frac{1}{2}} -$$
характеризує відношення енергії електрона, що

пов'язана з його рухом вздовж осі z до величини значення енергії електрона між двома сусідніми рівнями  $\hbar \omega_{\rm B}$ ,

2) 
$$C = \frac{2}{\hbar\omega_B} \left( U_0 - \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} \right) -$$
значення перевищення висоти

потенціального бар'єру над енергією електрона, пов'язаною з його рухом вздовж вісі x, в одиницях енергії  $\hbar \omega_{\!_B}$ ,

3) 
$$\varphi = \frac{2eE}{\omega_B} \left(\frac{\hbar}{m\omega_B}\right)^{\frac{1}{2}}$$
 – коефіцієнт, який характеризує потенціальну

енергію електрона в зовнішньому електричному полі,

4) 
$$\varphi_m = \frac{e^2}{4} \left(\frac{m\omega_B}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}$$
 – коефіцієнт, що характеризує потенціальну енергію

електрона, пов'язану з його взаємодією з «дзеркальним» позитивним зображенням в тілі металу,

5) 
$$x = a\xi, a = \sqrt{h/(m\omega_B)}$$
 – вибрана одиниця довжини для даної задачі.

На рисунку 4.1 приведено графік залежності висоти потенціального бар'єру від повздовжньої координати.



Рисунок 4.1. Ефективна потенціальна енергія V(x) електрона біля поверхні металу у різних масштабах: а) від 0 до 6·10<sup>-8</sup> м, б) від 0 до 1.2·10<sup>-3</sup> м. Лінією позначено випадок Е=100 МВ/м, В=0. Точками позначено Е=100 МВ/м, В=1 Тл.

З рисунка 4.1 видно, що поблизу межі метал-вакуум форма потенціального бар'єру співпадає з потенціальним бар'єром у випадку відсутності магнітного поля. Але зі збільшенням відстані від межі металу потенціальний бар'єр у присутності зовнішнього магнітного поля починає зростати і стає нескінченним. У результаті ми очікуємо, що процес польової емісії у присутності зовнішнього магнітного поля паралельного поверхні металу відбуватиметься лише для обмеженого міжелектродного проміжку.

## 4.4 Лоренц-інваріантний польовий емісійний струм

Узагальнимо теорію Фаулера-Нордгейма [25] на випадок присутності зовнішнього магнітного поля, паралельного до поверхні металу. Це можна зробити, записавши густину струму в коваріантній 4-х вимірній формі. У будь-якій іншій системі відліку, що рухається перпендикулярно напрямку електричного поля, внаслідок перетворення Лоренца для електромагнітного поля, окрім електричного, з'явиться магнітне поле  $\vec{B} \perp \vec{E}$ . У цьому випадку нам необхідно застосувати два Лоренц-інваріанта:

$$I_1 = F_{ik}F^{ik} \Longrightarrow E^2 - (cB)^2 = inv,$$

$$I_2 = \varepsilon_{iklm}F^{ik}F^{lm} \Longrightarrow E \cdot B = inv,$$
(4.12)

де  $\mathcal{E}_{iklm}$  – цілковито антисиметричний одиничний тензор.  $I_1$  – істинний скаляр,  $I_2$  – псевдоскаляр (добуток  $F^{ik}$  на дуальний йому тензор). Оскільки псевдоскаляр не може входити в істинний чотири-вектор, то залишається тільки інваріант  $I_1$  [115].

Відзначимо, що характер руху зарядженої частинки в перпендикулярних електричному та магнітному полях визначається інваріантом І<sub>1</sub>.

У випадку *I*<sub>1</sub><0 зовнішнє поле є полем магнітного типу. Заряджена частинка рухається по трохоїді, дрейфуючи вздовж електрода.

У випадку  $I_1>0$  зовнішнє поле є полем електричного типу. Заряджена частинка прискорюється електричним полем і лише відхиляється в сторону під дією магнітного поля, прямуючи на нескінченність. Будемо припускати в подальшому, що для зовнішнього поля  $I_1>0$  і використовувати відповідні величини полів.

Струм польової емісії добре описується теоретично рівнянням Фаулера-Нордгейма і дає такий вираз для щільності струму [25]:

$$j_{F-N} = A \cdot E^2 \exp(-b/E), \qquad (4.13)$$

де

$$A = \frac{1}{4\pi^{2}\hbar} \frac{\mu^{\frac{1}{2}}}{(\varphi + \mu)\varphi^{\frac{1}{2}}}, \ b = \frac{4\sqrt{2m}\varphi^{\frac{3}{2}}}{3\hbar}.$$

У виразі використані такі позначення: *е* – заряд електрона, *µ* – термодинамічний потенціал електрона, *φ* – робота виходу, *ħ* – стала Планка.

Щоб оцінити вплив магнітного поля на густину струму польової емісії, будемо використовувати коваріантний підхід, тобто, використаємо твердження, що процеси у вакуумному проміжку підпорядковуються законам фізики, які описуються співвідношенням між фізичними величинами (що записані в коваріантній формі), однаковими в будь-якій інерціальній системі відліку.

Густина струму є векторна величина і, виходячи з диференціальної форми закону Ома:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \qquad (4.14)$$

де *σ*-скаляр, який враховуючи формулу Фаулера-Нордгейма (4.13) дорівнює:

$$\sigma = A \cdot E \exp(-b/E). \tag{4.15}$$

Для узагальнення (4.13) під експонентою потрібно провести заміну:

$$E \to \sqrt{E^2 - (cB)^2} \,. \tag{4.16}$$

Ми маємо записати квадрат електричного поля перед експонентою у виразі для густини струму польової емісії (4.13) у вигляді:

$$\sigma \sim \sqrt{I_1} \Longrightarrow E^2 \to \left| \vec{E} \right| \sqrt{I_1} \,. \tag{4.17}$$

Щоб отримати вектор напруженості електричного поля, ми можемо використати лише тензор електромагнітного поля, домноживши його на інший вектор, що характеризує фізичну величину у процесі польової емісії електронів. Використаємо для цього чотири-швидкість частинки *u<sub>k</sub>*:

$$u_k = \left(\gamma, \frac{\vec{V}}{c}\gamma\right),\tag{4.18}$$

де

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Позначимо вектор який утвориться після множення тензора на чотириімпульс через  $G^{i} = F^{ik}u_{k}$ .

Вектор густини струму  $\vec{j}$  – це три компоненти 4-вектора  $j^i$ .  $j^i$  можна побудувати тільки з  $F^{ik}$  «згорнувши» зайвий індекс k за допомогою  $U_k$ . Тоді,

$$j^{i} \sim F^{ik} u_{k} = G^{i} .$$

Легко побачити, що даний вектор в тензорній формі має вигляд:

$$G^{i} = F^{ik}u_{k} = \left(\vec{E}\frac{\vec{V}}{c}\gamma, \frac{\varepsilon}{c}\vec{E}\gamma + \gamma[\vec{V}\times\vec{B}]\right).$$
(4.19)

У випадку B = 0 і з урахуванням того, що в цьому випадку швидкість нової системи відліку V = 0 отримаємо вираз:

$$\vec{G} = mc\vec{E} \,. \tag{4.20}$$

Тоді густина струму в 4-й коваріантній формі прийме вигляд:

$$j^{i} = AF^{ik}u_{k} \cdot \sqrt{I_{1}} \cdot \exp(-b/\sqrt{I_{1}}).$$

$$(4.21)$$

Враховуючи, що  $V = \frac{cB}{E}$ ,  $\gamma$  приймає форму  $\gamma = \frac{E}{\sqrt{E^2 - c^2 B^2}}$ . Абсолютна величина просторових компонент цього виразу дає потрібну величину густини струму з урахуванням впливу магнітного поля  $(\vec{V} || \vec{B})$ :

$$|\vec{j}| = AE^2 \exp\left(-b / \sqrt{E^2 - c^2 B^2}\right).$$
(4.22)

Отримане модифіковане рівняння Фаулера-Нордгейма (4.22) є узагальненням на випадок присутності зовнішнього магнітного поля, перпендикулярного до електричного. За відсутності магнітного поля це рівняння перетворюється на відоме рівняння Фаулера-Нордгейма [25]. На рисунку 4.2 показано графік залежності струму польової емісії від величини напруженості електричного поля та індукції магнітного поля, отриманий з рівняння (4.22) в координатах Фаулера-Нордгейма. Вплив магнітного поля на густину струму зменшується зі збільшенням напруженості електричного поля.



Рисунок 4.2. Вплив магнітного поля на струм польової емісії у координатах Фаулера-Нордгейма виходячи з узагальненої формули Фаулера-Нордгейма. Лінією показано струм польової емісії у відсутності магнітного поля. Штрихами – струм у присутності зовнішнього магнітного поля паралельного до поверхні величиною 0,5 Тл.

Враховуючи, що електричне поле може збільшуватися на вістрях в 30÷140 разів [87], реальне значення електричного поля дорівнює:  $E' = \beta E$ , де  $\beta$  – коефіцієнт підсилення поля. Виберемо значення електричного та магнітного полів, які використовувались в експерименті в Інституті прикладної фізики НАН України  $E = 100 \frac{\text{MB}}{\text{M}}$ , B = 0.33 Tr [4] і коефіцієнт підсилення поля  $\beta = 30$ . Вплив магнітного поля на струм польової емісії поля запишемо як:

$$|\vec{j}_{B}| = j_{FN} \cdot \left(e^{-\frac{b}{\beta E}}\right)^{1/2\beta^{2}} (1 - \frac{1}{2\beta^{2}}) \approx j_{FN} \cdot (1 - 5 \cdot 10^{-4}).$$
(4.23)

Можна побачити, що на практиці порівняно невеликі значення індукції магнітного поля не впливають на величину струму польової емісії. Отже, можна сказати, що ефект наявності магнітного поля в реальному експерименті буде ледь помітним. Очевидно, що ефект такого магнітного поля на струм емітованих іонів взагалі не спостерігається.

Також проведемо оцінку впливу магнітного поля на коефіцієнт проходження, отриманий у попередньому розділі, використовуючи дані експериментальні параметри. Враховуючи звичайний у таких експериментах коефіцієнт підсилення поля 30÷140 [87] з формули (3.90) отримуємо, що магнітне поле зменшить коефіцієнт проходження на менше ніж на 0,015%, що узгоджується з отриманими результатами.

#### 4.5 Вплив магнітного поля на електрони в міжелектродному проміжку

Експерименти, проведені в Інституті прикладної фізики НАН України на установці з великим міжелектродним проміжком, повинні залежати від процесів в міжелектродному проміжку [124, 126]. У [127] автори показують, що змінне магнітне поле (навіть невелике значення 0,03 Тл) сприяє прискоренню дифузії і фазоутворення збільшуючи  $j_{diff}^{(0)}$ . Інші нейтральні потоки  $j_{rest}^{(0)}$ ,  $j_{desor}^{(0)}$ ,  $j_{T,avap}^{(0)}$ ,  $j_{lon,atom}^{(0)}$  не залежать від магнітного поля, але процес їхньої іонізації приводить до потоків заряджених частинок, на які впливатиме магнітне поле. Як слідує з [128], найбільш ефективний для іонізації інтервал енергій електрона 10-100 еВ. Для напруженості електричного поля E = 100 MB/m це відповідає прошарку товщиною 0,1-1 мкм. У цій області утворюється прикатодна плазма. Електрони, емітовані з металу або утворені в міжелектродному проміжку, швидко набирають енергію більшу за

ефективну. Тому вони не будуть іонізувати нейтральні атоми. Саме на процес іонізації і можна вплинути зовнішнім магнітним полем.

Розглянемо, як впливає магнітне поле на електрони, які з'являються у міжелектродному проміжку. Добре відомо, що електрон у взаємно перпендикулярних електричному і магнітному полях буде рухатись по трохоїді [115]. Тим самим збільшується довжина пробігу електрона з ефективною енергією. Запишемо рівняння руху електрона у даній конфігурації полів у безрозмірних координатах:

$$\xi = (1 + \tilde{\nu}_{0x})\sin\tau + \tilde{\nu}_{0y}(\cos\tau - 1) - \tau, \zeta = \tilde{\nu}_{0y}\sin\tau + (1 + \tilde{\nu}_{0x})(1 - \cos\tau),$$
(4.24)

дe

$$t_0 = \frac{2\pi}{\omega_B}, \ \mathcal{U}_{dr} = \mathcal{C}, \ L_{dr} = \mathcal{U}_{dr} t_0, \ \xi = \frac{x}{L_{dr}}, \ \zeta = \frac{y}{L_{dr}}, \ \tau = \frac{t}{t_0}, \ \tilde{\mathcal{U}}_0 = \frac{\mathcal{U}_0}{\mathcal{U}_{dr}},$$

 $\omega_B$  – циклотронна частота,  $v_{0x}$  і  $v_{0y}$  – початкові швидкості вздовж відповідних осей. Довжина траєкторії може бути знайдена за формулою:

$$l = \int_{0}^{\tau_{hd}} d\tau \sqrt{\nu_{x}^{2} + \nu_{y}^{2}} \approx h_{d} + \nu_{0} \sqrt{2h_{d}} , \qquad (4.25)$$

дe

$$h_d \equiv h \big|_{y=d} = \frac{d}{L_{dr}}.$$

104

Використовуючи значення експерименту проведеного в Інституті прикладної фізики НАН України [4] (B = 0.33 Тл, E = 100 МВ/м і d = 100 мкм), ми можемо обчислити параметри:  $t_0 = 10^{-10}$  с,  $L_{dr} = 3.25$  см і  $h_d = 0.003$ .

Магнітне поле істотно змінює траєкторію електронів іонізації з енергією декількох eB, спрямованих до катода. Максимальна іонізація відбувається для електронів з енергією порядку десяти eB [128]. З цього випливає (з урахуванням енергії іонізації), що електрони, які утворюються в проміжку, мають енергію кілька eB. Як приклад, вибрано електрон з енергією є = 2 eB. Враховуючи, що швидкість

 $v = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}$ , відносне подовження траєкторії електрона буде:

$$\frac{\Delta l}{l} = \upsilon_0 \sqrt{\frac{2}{h_d}} \approx 0.1. \tag{4.26}$$

Слід підкреслити, що подовження траєкторії електронів призводить до посилення струму за рахунок збільшення іонізації. У випадку відсікаючого магнітного поля  $B_H$  всі утворені в міжелектродному проміжку електрони (як емітовані, так і іонізовані) не досягають анода. І в цьому випадку подовження траєкторії електронів не впливає на ймовірність пробою.

Разом з тим, магнітне поле змінює кут входження електрона в метал і це може вплинути на процес десорбції. Оцінка зміни кута входження електрона у поверхню анода дає:  $\theta \approx \frac{v_x}{v_y} = \sqrt{\frac{h_d}{2}} \approx 2^\circ$ . Кут нахилу малий і ефект збільшення темнового струму буде слабкий.

Узагальнюючи вищесказане, можна сказати, що магнітне поле може впливати на густину струму польової емісії та на кут входження електронів у поверхню аноду, тим самим впливаючи на десорбцію та дифузію газів з об'єму електродів, зміну довжини траєкторії електронів у міжелектродному проміжку. Найбільший вплив магнітного поля проявляється в можливому збільшенні темнового струму шляхом збільшення довжини траєкторії руху електрона на декілька відсотків від початкової.

### Висновки до Розділу 4

У даному розділі проведено аналіз та теоретичне пояснення експериментів проведених у Інституті прикладної фізики НАН України та Європейській організації з ядерних досліджень по вивченню впливу магнітного поля, перпендикулярного електричному, на процеси, що відбуваються при прикладанні високої напруги у міжелектродному проміжку у високому вакуумі та отримано наступні результати:

1. Знайдено явний вираз потенціального бар'єру в такій конфігурації полів: він стає непрозорим на відстанях декількох радіусів ларморівської орбіти та має метастабільну область, куди можуть проникати електрони польової емісії. Струм польової емісії в цьому випадку дрейфує вздовж поверхні металу.

2. Було виконано аналітичне узагальнення рівняння Фаулера-Нордгейма на випадок присутності зовнішнього магнітного поля, паралельного поверхні металу, шляхом використання Лоренц-інваріанта електромагнітного поля. Виконано оцінку впливу магнітного поля на густину струму польової емісії для типових значень  $\vec{E}$  і  $\vec{B}$ . Показано, що для значень електричного та магнітного полів, що використовувались в експериментах ІПФ НАН України та ЦЕРН зміна густини електронного струму буде складати близько 0,05%.

3. Теоретично розглянуті компоненти потоків у міжелектродному проміжку та можливість впливу на них зовнішнього магнітного поля, паралельного поверхні. Проаналізовано наявність всіх заряджених та нейтральних потоків у процесі формування пробою. У випадку малих міжелектродних проміжків традиційно основним процесом є польова емісія електронів. Для характерних величин  $\vec{E}$  і  $\vec{B}$  вплив магнітного поля на емісійний струм становить близько 0,05 %. Очевидно, що вплив такого магнітного поля на важкі іони взагалі не буде помітним.

4. Іонізація газів та парів металів у міжелектродному проміжку призводить до появи електронних потоків з енергією близько 1-10 еВ. Електрони з такими енергіями, спрямованими на катод, істотно змінюють траєкторію під дією магнітного поля, паралельного поверхні металу. Наявність зовнішнього магнітного поля порядку B = 0,3-0,5 Тл збільшило довжину траєкторії низькоенергетичного електрона на кілька відсотків. Оцінка для тих самих полів показує зміну кута електрона, що падає на поверхню анода приблизно на 2°. Зміна кута падіння призводить до збільшення десорбції, але для таких значень поля ефект буде незначним.

Результати досліджень даного розділу наведено у публікаціях [3,4,6].

До основних результатів, отриманих у дисертаційний роботі, можна віднести наступні:

1. Розв'язана задача про квантово-механічний рух електрона в зовнішніх електричному та магнітному полях при довільному куті між ними. Знайдено енергетичний спектр електрона, що рухається в такій конфігурації полів, та пояснено фізичний зміст окремих складових цього спектру. Показано, що коефіцієнт проходження потенціального бар'єру електроном металу при паралельній орієнтації електричного та магнітного полів не залежить від величини магнітного поля. Цим самим строго доведено припущення Блатта [89], про незалежність коефіцієнта проходження електроном потенціального бар'єру у випадку колінеарності електричного та магнітного полів.

2. Виконано узагальнення на релятивістський випадок рівняння польової емісії електронів. Знайдено загальний вираз коефіцієнта проходження потенціального бар'єру та наведено спрощену аналітичну формулу для типових лабораторних параметрів. Показано, що збільшення коефіцієнта проходження потенціального бар'єру у випадку польової емісії з металів складає 0,015%. У випадку польової емісії з полярного регіону нейтронної зірки збільшення коефіцієнта тунелювання складе близько 15%.

3. Знайдено ефект релятивістського стиснення потенціального бар'єру на межі метал-вакуум. Під час зменшення ширини бар'єру збільшується коефіцієнт проходження, чим можна пояснити і отримане збільшення коефіцієнта проходження у випадку присутності електричного поля.

4. Знайдено загальний вигляд та спрощену аналітичну формулу коефіцієнта проходження потенціального бар'єру на межі метал-вакуум у випадку впливу зовнішнього магнітного поля, перпендикулярного електричному. Показано, що магнітне поле зменшить коефіцієнт проходження менше ніж на 0,015% для
типових значень електричного та магнітного полів ( $E = 100 \frac{\text{MB}}{M}$ , B = 0.33 Tл), що узгоджується з раніше отриманими результатами.

5. Проаналізовано вплив магнітного поля, паралельного поверхні катоду, на компоненти темнового струму у процесі формування пробою в експериментах ЦЕРН та ІПФ НАН України [4]. Показано, що зовнішнє магнітне поле збільшує довжину траєкторії електрона, утвореного в міжелектродному проміжку, на 10 %. Зростання темнового струму внаслідок збільшення довжини траєкторії електрона пояснює зменшення напруги пробою в експериментах ІПФ НАН України.

Таким чином, мета дисертаційної роботи досягнута, поставлені завдання повністю розв'язані.

# СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] В. І. Мирошніченко и С. О. Лебединський, «Квантово-механічний рух електрона в паралельних магнітному та електричному полях», Доповіді НАН України, № 9, р. 61–65, 2014.
- [2] В. І. Мирошніченко и С. О. Лебединський, «Квантово-механічний рух електрона в схрещених однорідних електричному та магнітному полях», Доповіді НАН України, № 11, рр. 72-76, 2014.
- [3] S. O. Lebedynskyi, V. I. Miroshnichenko, R. I. Kholodov и V. A. Baturin, «The effect of a magnetic field on the motion of electrons for the field emission process description», *Problems of Atomic Science and Technology*, № 98, pp. 62-66, 2015.
- [4] S. Lebedynskyi, O. Karpenko, R. Kholodov, V. Baturin, I. Profatilova, N. Shipman и W. Wuensch, «DC vacuum breakdown in an external magnetic field», *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A*, № 908, p. 318–324, 2018.
- [5] S. O. Lebedynskyi, O. O. Pasko и R. I. Kholodov, «Relativistic correction of the field emission current in the Fowler-Nordheim formalism», *Journal of nano- and electronic physics*, № 2, pp. 02022-1–02022-6, 2019.
- [6] S. Lebedynskyi и R. Kholodov, «Field emission with relativistic effects in a magnetic field», *The European Physical Journal D*, т. 73, № 8, pp. 190-1-190-5, 2019.
- [7] С. О. Лебединський, «III Міжрегіональна науково-практична конференція молодих учених «Сучасні проблеми експериментальної та теоретичної фізики» – СПЕТФ'2014, 16-17 квітня 2014», в Рух електрона у паралельних магнітному та електричному полях, Суми, Україна, 2014.
- [8] S. O. Lebedynskyi и V. I. Miroshnichenko, «Trans-European School of High Energy Physics – TESHEP'2014, 17-24 July 2014», в Quantum-mechanical movement of the electron in electric and magnetic fields, Basivka, Lviv Region, Ukraine, 2014.

- [9] С. О. Лебединський, «І Всеукраїнська науково-практична конференція молодих учених «Сучасні проблеми експериментальної та теоретичної фізики». – СПЕТФ+МНФ'2015», в Потенціальний бар'єр на межі металвакуум при наявності схрещених електричного та магнітного полів, Суми, Україна, 2015.
- [10] S. O. Lebedynskyi и R. I. Kholodov, «II Всеукраїнська науково-практична конференція молодих учених «Сучасні проблеми експериментальної та теоретичної фізики». СПЕТФ+МНФ'2016», в Decreasing of the field emission current by the external magnetic field, Суми, Україна, 2016.
- [11] С. О. Лебединський, « XVI Конференція з фізики високих енергій, ядерної фізики і прискорювачів, 20-23 березня 2018 р.», в Релятивістська поправка до струму польової емісії електронів, Харків, Україна, 2018.
- [12] S. O. Lebedynskyi, «IV Всеукраїнська науково-практична конференція молодих учених «Сучасні проблеми експериментальної та теоретичної фізики». – СПЕТФ+МНФ'2018, 24-25 квітня 2018», в Relativistic correction to the field electron emission current, Суми, Україна, 2018.
- [13] С. О. Лебединський и Р. І. Холодов, «XVII Конференція з фізики високих енергій, ядерної фізики і прискорювачів, 26-29 березня 2019 р.», в *Релятивістський підхід до тунелювання електронів з конструкційних матеріалів прискорювачів*, Харків, Україна, 2019.
- [14] С. О. Лебединський и Р. І. Холодов, «V Всеукраїнська науково-практична конференція молодих учених «Сучасні проблеми експериментальної та теоретичної фізики». – СПЕТФ+МНФ'2019», в Вплив зовнішнього магнітного поля на польову електронну емісію, Суми, Україна, 2019.
- [15] S. Lebedynskyi, «8th International Workshop on Mechanisms of Vacuum Arcs (MeVArc 2019)», Field electron emission in an external magnetic field parallel to the surface, Padova, Italy, 2019.

- 112
- [16] R. W. Wood, «A New Form of Cathode Discharge and the Production of X-Rays, together with Some Notes on Diffraction. Preliminary Communication», *Phys. Rev. (Series I)*, т. 5, № 1, pp. 1-10, 1897.
- [17] J. E. Lilienfeld, «Einiges Experimentelle zur autoelektronischen Entladung», Zeitschrift für Physik, т. 15, № 1-2, pp. 46-50, 1923.
- [18] W. Schottky, «Über kalte und warme Elektronenentladungen», Zeitschrift für Physik, т. 14, № 1, pp. 63-106, 1923.
- [19] F. Rother, «Über den Austritt von Elektronen aus kalten Metallen», Annalen der Physic, т. 386, № 20, pp. 317-372, 1926.
- [20] B. S. Gossling, «The emission of electrons under the influence of intense electric fields», *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical, Series* 7, т. 1, № 3, pp. 609-635, 1926.
- [21] R. A. Millikan и C. F. Eyring, «Laws Governing the Pulling of Electrons out of Metals by Intense Electrical Fields», *Phys. Rev.*, т. 27, № 1, pp. 51-67, 1926.
- [22] R. A. Millikan и C. C. Lauritsen, «Relations of Field-Currents to Thermionic-Currents», *Proc Natl Acad Sci U S A*, т. 14, № 1, pp. 45-49, 1928.
- [23] N. A. De Bruyne, «The Temperature Dependence of Field Currents», *Phys. Rev.*, T. 35, № 2, pp. 172-176, 1930.
- [24] R. J. Piersol, «Electronic Discharge from Cold Wires in Intense Electric Fields», Phys. Rev., т. 31, № 3, pp. 441-447, 1928.
- [25] R. H. Fowler и L. Nordheim, «Electron emission in intense electric fields», Proceedings of the Royal Society of London. Series A, т. 119, № 781, pp. 173-181, 1928.
- [26] L. W. Nordheim, «The effect of the image force on the emission and reflexion of electrons by metals», *Proceedings of the Royal Society of London. Series A.*, т. 121, № 788, pp. 626-639, 1928.

- [27] T. E. Stern, B. S. Gossling и R. H. Fowler, «Further studies in the emission of electrons from cold metals», *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, т. 124, № 795, pp. 699-723, 1929.
- [28] C. C. Chambers, «Emission of electrons from cold metal surfaces», *Journal of the Franklin Institute*, т. 218, № 4, pp. 463-484, 1934.
- [29] J. W. Beams, «Field Electron Emission from Liquid Mercury», *Phys. Rev.*, т. 44, № 10, pp. 803--807, 1933.
- [30] L. R. Quarles, «The Relation Between the Electron Field Emission and the Work Function of Liquid Mercury», *Phys. Rev.*, т. 48, № 3, pp. 260-264, 1935.
- [31] D. H. Moore, «The Relation Between Electron Field Emission and Contact Electromotive Force for Liquid Mercury», *Phys. Rev.*, т. 50, № 4, pp. 344-347, 1936.
- [32] A. J. Ahearn, «The Effect of Temperature, Degree of Thoriation and Breakdown on Field Currents from Tungsten and Thoriated Tungsten», *Phys. Rev.*, T. 50, № 3, pp. 238-253, 1936.
- [33] E. W. Müller, «Die Abhängigkeit der Feldelektronenemission von der Austrittsarbeit», Z. Physik, т. 102, № 11-12, pp. 734-735, 1936.
- [34] A. Wehnelt и W. Schilling, «Elektronenmikroskopische Untersuchung des Elektronenaustritts aus kalten Metallen», Z. Physik, т. 98, № 3-4, р. 286–287, 1935.
- [35] J. E. Henderson и R. E. Badgley, «The work required to remove a field electron», *Physical Review*, т. 38, № 3, р. 590, 1931.
- [36] R. K. Dahlstrom, K. V. Mackenzie и J. E. Henderson, «The Total Energy Distribution for Field Current», *Physical Review*, т. 48, № 5, р. 484, 1935.
- [37] E. W. Muller, «Elektronenmikroskopische Beobachtungen von Feldkathoden», Z. *Physik*, т. 106, № 9-10, pp. 541-550, 1937.
- [38] M. Benjamin, R. O. Jenkins и R. H. Fowler, «The distribution of autelectronic emission from single crystal metal points. I. Tungsten, molybdenum, nickel in the

clean state», Proceedings of the Royal Society of London. Series A., т. 176, № 965, pp. 262-279, 1940.

- [39] R. Haefer, «Experimentelle Untersuchungen zur Prüfung der wellenmechanischen Theorie der Feldelektronenemission», Z. Physik, т. 116, № 9-10, pp. 604-623, 1940.
- [40] W. P. Dyke и J. K. Trolan, «Field emission: large current densites, space charge and vacuum arc», *Phys. Rev.*, т. 89, № 4, pp. 799-808, 1953.
- [41] W. P. Dyke, J. K. Trolan, E. E. Martin и J. P. Barbour, «The field emission initiated vacuum arc. I. Experiments on arc initiation», *Phys. Rev*, т. 91, № 5, pp. 1043-1054, 1953.
- [42] W. W. Dolan, W. P. Dyke и J. K. Trolan, «The field emission initiated vacuum arc. II. The resistively heated», *Phys. Rev.*, т. 91, № 5, pp. 1054-1057, 1953.
- [43] J. P. Barbour, W. W. Dolan, J. K. Trolan, E. E. Martin и W. P. Dyke, «Spacecharge effects in field emissio», *Phys. Rev.*, т. 1, № 92, pp. 45-51, 1953.
- [44] E. E. Martin, J. K. Trolan и W. P. Dyke, «Stable, high density field emission cold cathode», J. Appl. Phys, т. 31, № 5, pp. 782-789, 1960.
- [45] W. P. Dyke, F. M. Charbonnier, R. W. Strayer, R. L. Floyd, J. P. Barbour и J. K. Trolan, «Electrical stability and life of the heated field emission cathode», J. Appl. Phys., т. 31, № 5, pp. 790-805, 1960.
- [46] T. J. Lewis, «Theoretical interpretation of field emission experiments», *Phys. Rev*,
  T. 101, № 6, pp. 1694-1698, 1956.
- [47] P. H. Cutler и D. Nagy, «The use of a new potential barrier model in the Fowler-Nordheim theory of field», *Surface Science*, т. 3, № 1, pp. 71-94, 1965.
- [48] М. И. Элинсон, В. А. Горьков и Г. Ф. Васильев, «Полевая эмиссия с рения», *Радиотехника н электроника*, т. 3, № 3, pp. 307-312, 1958.
- [49] М. И. Элинсон, «Влияние адсорбции газа на поверхности эмиттера на полевую эмиссию электронов», *Радиотехника н электроника*, т. 3, № 3, рр. 438-439, 1958.

- [50] М. И. Элинсон и Г. Ф. Василье, «Исследование полевой эмиссии с гексаборида лантана», *Радиотехника н электроника*, т. 3, № 7, рр. 945-953, 1958.
- [51] М. И. Элинсон и Г. А. Кудинцева, «Полевые электронные катоды металлических тугоплавких соединений», *Радиотехника и электроника*, т. 7, pp. 1417-1423, 1962.
- [52] М. И. Элинсон и Г. А. Кудинцева, «Полевые электронные катоды металлических тугоплавких соединений», *Радиотехника и электроника*, т. 7, № 9, pp. 1511-1518, 1962.
- [53] И. И. Гофман, О. Д. Протопопов и Г. Н. Шуппе, «Импульсная техника при исследовании полевой эмиссии от вольфрамового излучателя», Известия Академии наук УзССР, т. 6, pp. 72-77, 1959.
- [54] И. И. Гофман и Г. Н. Шуппе, «Импульсная техника в исследовании полевой эмиссии с монокристаллов вольфрама», *Радиофизика и электроника*, т. 4, pp. 1215-1216, 1959.
- [55] A. V. Crewe, D. N. Eggenberger, J. Wall и L. M. Welter, «Electron Gun Using a Field Emission Source», *Review of Scientific Instruments*, т. 39, № 4, pp. 576-583, 1968.
- [56] A. V. Crewe, J. Wall и L. M. Welter, «High-resolution scanning transmission electron microscope», J. Appl. Phys., т. 39, № 13, pp. 5861-5868, 1968.
- [57] A. V. Crewe и J. Wall, « Proc. 7th Int. Congr Electron Microsc, Grenoble, France, 1970», в *High-resolution capabilities in scanning microscopy*, Paris, 1970.
- [58] A. V. Crewe, J. Wall и J. Langmore, «Visibility of single atoms», *Science*, т. 168, № 3937, pp. 1338-1340, 1970.
- [59] Г. Н. Фурсей, «Полевая эмиссия из монокристалла вольфрама, предшествующая развитию вакуумной дуги», *Радиотехника и электроника*, т. 6, № 2, pp. 289-302, 1961.

- [60] И. Л. Сокольская и Г. Н. Фурсей, «Исследование явлений, предшествующих разрушению вольфрамового эмитера импульсами тока полевой электронной эмиссии высокой плотности», *Радиотехника и электроника*, т. 7, № 9, pp. 1474-1483, 1962.
- [61] G. N. Fursey, V. E. Ptitsyn и D. N. Krotevich, «Proceedings of the 11-th International Symposium on Discharges and Electrical Insulation in Vacuum», в Spontaneous migration of the surface atoms at maximum current densities of the field-electron emission initiating vacuum breakdown, Berlin, 1984.
- [62] Д. Н. Кротевич, В. Е. Птицын и Г. Н. Фурсей, «Самопроизвольная перестройка автоэмиссионного катода при предельных плотностях тока», Журнал технической физики, т. 55, № 3, pp. 625-627, 1985.
- [63] Г. К. Карцев, Г. А. Месяц, Д. И. Проскуровский, В. П. Ротштейн и Г. Н. Фурсей, «Исследование временных характеристик перехода автоэлектронной эмиссии в вакуумную дугу», Докл. АН СССР, т. 192, № 2, pp. 309-312, 1970.
- [64] И. Л. Сокольская и Г. Н. Фурсей, «Влияние различных покрытий на характер явлений, предшествующих разрушению вольфрамовых эмиттеров импульсами электронного тока большой плотности», *Радиотехника и* электроника, т. 7, № 9, pp. 1474-1483, 1962.
- [65] Г. Н. Фурсей и С. А. Шакирова, «К вопросу о возможности локализации автоэмиссии в малых телесных углах», *ЖТФ*, т. 36, № 6, pp. 1125-1131, 1966.
- [66] В. Г. Павлов, А. А. Рабинович и В. Н. Шредник, «Высокие локальные плотности тока автоэлектронной эмиссии в стационарном режиме», *Журнал технической физики*, т. 45, № 10, рр. 2126-2134, 1975.
- [67] G. N. Fursey, L. M. Baskin, D. V. Glazanov, A. O. Yevgen'ev, A. V. Kotcheryzhenkov и S. A. Polezaev, «The specific features of field emission from submicron cathode surface areas at high current densities», *Journal of Vacuum Science & Technology B*, т. 16, № 1, pp. 232-238, 1998.

<sup>116</sup> 

- [68] A. E. Bell и L. W. Swanson, «Total energy distributions of field-emitted electrons at high current density», *Phys. Rev. B*, т. 19, № 7, pp. 3353-3364 , 1979.
- [69] G. Lea и R. Gomer, «Evidence of electron-electron scattering from field emission», *Phys. Rev. Lett.*, т. 25, № 12, pp. 804--806, 1970.
- [70] J. W. Gadzuk и E. W. Plummer, «Hot-Hole---Electron Cascades in Field Emission from Metals», *Phys. Rev. Lett.*, т. 26, № 2, pp. 92-95, 1971.
- [71] L. W. Swanson и A. E. Bell, «Recent advances in field electron microscopy of metals», Advances in Electronics and Electron Physics, т. 32, pp. 193-309, 1973.
- [72] V. T. Binh, S. T. Purcell, N. Garcia и J. Doglioni, «Field-emission electron spectroscopy of single-atom tips», *Phys. Rev. Lett.*, т. 69, № 17, pp. 2527--2530, 1992.
- [73] L. Cranberg, «The Initiation of Electrical Breakdown in Vacuum», Journal of applied physics, т. 23, № 5, pp. 518-522, 1952.
- [74] D. Alpert, D. A. Lee, E. M. Lyman и H. E. Tomaschke , «Initiation of electrical breakdown in ultrahigh vacuum», *Journal of Vacuum Science & Technology*, т. 1, № 35, pp. 35-50, 1964.
- [75] P. A. Chatterton, «A theoretical study of field emission initiated», Proceedings of the Physical Society, т. 88, pp. 231-245, 1966.
- [76] D. W. Williams и W. T. Williams, «Field-emitted current necessary for cathodeinitiated vacuum breakdown», *Journal of Physics D: Applied Physics*, т. 5, pp. 280-290, 1972.
- [77] G. N. Fursey, «Field emission and vacuum breakdown», *IEEE transactions on electrical insulation*, Т. %1 из %2EI-20, № 4, pp. 659 670, 1985.
- [78] R. V. Latham, K. H. Bayliss и B. M. Cox, «Spatially correlated breakdown events initiated by field electron emission in vacuum and high-pressure SF6», *Journal of Physics D: Applied Physics*, т. 19, pp. 219-231, 1986.
- [79] М. И. Елинсон и Г. Ф. Васильев, Автоэлектронная эмиссия, Москва: Государственное издательство физико-математический литературы, 1958.

- [80] В. А. Горьков, М. И. Елинсон и В. Б. Сандомирский, «О роли пространственного заряда при отборе автоэлектронных токов большой плотности», *Радиотехника и электроника*, т. 7, № 9, рр. 1495-1500, 1962.
- [81] Л. М. Баскин, Л. Л. Анантев, Д. А. Борисов, А. А. Кантонистов и Г. Н. Фурсей, «Эффект устранения ионной бомбардировки автоэлектронного катода», *Радиотехника и электроника*, т. 28, № 12, pp. 2462-2464, 1983.
- [82] J. W. Wang, RF Properties of Periodic Accelerating Structures for Linear Colliders, SLAC, 1989.
- [83] R. W. Roth, H. Heinrichs, V. G. Kurakin, G. Muller, H. Piel и J. Pouryamout, «Suppression of Field Emission in Superconducting S-Band Acceleration Structures», в Second European Particle Accelerator Conference, Nice, 1990.
- [84] G. Bienvenu, P. Fernandes и R. Parodi, «An investigation on the field emitted electrons in travelling wave accelerating structures», *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, т. 320, № 1-2, pp. 1-8, 1992.
- [85] M. Kildemo, «Newspark-test device for material characterization», Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A, т. 530, № 3, pp. 596-606, 2004.
- [86] A. Grudiev, S. Calatroni и W. Wuensch, «New local field quantity describing the high gradient limit of accelerating structures», *Phys. Rev. ST Accel. Beams*, т. 12, № 10, pp. 102001-102009, 2009.
- [87] A. Descoeudres, Y. Levinsen, S. Calatroni, M. Taborelli и W. Wuensch, «Investigation of the dc vacuum breakdown mechanism», *Phys. Rev. ST Accel. Beams*, т. 12, № 9, pp. 092001-0920011, 2009.
- [88] S. A. Barengolts, Y. A. Barengolts, V. G. Mesyats и M. M. Tsventoukh, «On the initiation of explosive emission processes in the accelerating structures of compact linear colliders», *Journal of Physics: Conference Series*, т. 946, № 1, pp. 012132-012136, 2018.
- [89] F. J. Blatt, «Field emission in a magnetic field», *Physical Review*, T. 131, № 1, pp. 166-169, 1963.

- [90] Г. А. Гогадзе, Ф. И. Ицкович и И. О. Кулик, «Квантовые осцилации тока холодной эмиссии металлов в магнитном поле», ЖЭТФ, т. 46, № 3, pp. 913-919, 1964.
- [91] Ш. М. Коган и В. Б. Сандомирский, «Влияние квантующего магнитного поля на автоэлектронную эмиссию», *Радиотехника и электроника*, т. 9, № 4, pp. 724-727, 1964.
- [92] Е. М. Лифшиц и Л. И. Питаевский, Статистическая физика. Часть II, Москва: Наука, 1978.
- [93] A. Ghosh и S. Chakrabarty, «The effects of strong quantizing magnetic fields on the cold emission of electrons from ultramagnetized compact stellar objects», *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, т. 425, р. 1239–1244, 2012.
- [94] D. J. Flood, «Field emission in high magnetic fields», Jorn. of Phys. and Chem. of Solids, т. 31, № 7, pp. 1649-1650, 1970.
- [95] И. А. Бурибаев и Б. Б. Шишкин, «Автоэлектронная эмиссия вольфрама в магнитном поле», *ФТТ*, т. 12, № 11, pp. 3309-3311, 1970.
- [96] R. F. Waites и H. A. Schwettman, «Field emission from bismuth and tungsten in a magnetic field», *Physical Review*, т. 8, № 6, pp. 2420-2425, 1973.
- [97] P. J. Kennedy и A. Y. Muir, «Modification of field-emission current from tungsten by external magnetic fields», *Solid State Communications*, т. 27, № 3, pp. 279-281, 1976.
- [98] Е. А. Литвинов и А. Ф. Щубин, «Катодное инициирование вакуумного пробоя при постоянном напряжении», Известия ВУЗов. Физика., т. II, pp. 90-93, 1974.
- [99] Г. Н. Фурсей, В. Э. Птицын и Н. В. Егоров, «Влияние магнитного поля на процесс автоэлектронной эмиссии из вольфрама», Письма в ЖЭТФ, т. 5, № 19, pp. 1161-1164, 1980.

120

- [100] В. Э. Птицын, Г. Н. Фурсей и Н. В. Егоров, «Аномалии процесса автоэлектронной эмиссии в магнитном поле», Письма в ЖЭТФ, т. 31, № 12, pp. 733-737, 1980.
- [101] В. Э. Птицын, Исследование влияния магнитного поля на автоэлектронную эмиссию при больших плотностях тока. Автореферат кандидатской диссертации, Ленинград: ЛПИ им. М.И. Калинина, 1980.
- [102] D. Stratakis, J. S. Berg, J. C. Gallardo и R. B. Palmer, «Effect of external magnetic fields on the operation of rf cavities», в *Proceedings of PAC09*, Vancouver, BC, Canada, 2009.
- [103] D. Stratakis, J. C. Gallardo и R. B. Palmer, «Effects of external magnetic fields on the operation of high-gradient accelerating structures», *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A.*, т. 620, р. 147–154, 2010.
- [104] Y. Y. Lau, P. J. Christenson и D. Chernin, «Limiting current in a crossed-field gap», *Physics of Fluids B: Plasma Physics*, т. 5, № 12, pp. 4486-4489, 1993.
- [105] A. W. Hull, «The Effect of A Uniform Magnetic Field on the Motion of Electrons Between Coaxial Cylinders», *Phys. Rev.*, т. 18, № 1, pp. 31-57, 1921.
- [106] R. B. Palmer, R. C. Fernow, J. C. Gallardo и D. Stratakis, «RF breakdown with external magnetic fields in 201 and 805 mhz cavities», *Phys. Rev. STAB*, т. 12, № 3, pp. 1-13, 2009.
- [107] D. Stratakis, J. C. Gallardo и R. B. Palmer, «Magnetically insulated high-gradient accelerating structures for muon accelerators», *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, т. 37, № 10, р. 105011, 2010.
- [108] D. Stratakis, J. C. Gallardo и R. B. Palmer, «RF breakdown in magnetic fields: Previous work, recent theory, and future plans», *AIP Conference Proceedings*, т. 1222, № 1, pp. 303-307, 2010.
- [109] D. Stratakis, J. C. Gallardo и R. B. Palmer, «Enhancement of accelerating field of microwave cavities by magnetic insulation», *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A*, т. 643, № 1, pp. 1-5, 2011.

- [110] D. Bowring, A. Kochemirovskiy, M. Leonova и et al., «A modular cavity for muon ionization cooling R & D», в *Proceedings of IPAC2013*, Shanghai, China, 2013.
- [111] A. Kochemirovskiy, D. Bowring, K. Yonehara и et al., «RF breakdown of 805 MHz cavities in strong magnetic fields», в *Proceedings of IPAC15*, Richmond, USA, 2015.
- [112] A. Kochemirovskiy, D. Bowring, K. Yonehara и et al., «Study of RF breakdown in 805 MHz pillbox modular cavity in strong magnetic field», в *Proceedings of IPAC2016*, Busan, Korea, 2016.
- [113] N. Shipman, I. Profatilova, A. T. Perez Fontenla, W. Wuensch и S. Calatroni, «Effect of an Externally Applied Magnetic Field on the Breakdown Rate in Ultra-High Vacuum Measured in the Large Electrode System at CERN», CLIC – Note – 1078, Geneva, Switzerland, 2017.
- [114] N. Fil, M. Belhaj, J. Hillairet, J. Puech и R. Mathevet, «Electron emission under uniform magnetic field of materials for fusion and space applications», *Fusion Engineering and Design*, т. 123, pp. 426-430, 2017.
- [115] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теоретическая физика в 10 т. Т. 3, Москва: Наука, 1969.
- [116] В. И. Смирнов, Курс высшей математики. Т. 3, ч. 2, Москва: Наука, 1974.
- [117] А. И. Ахиезер и В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, Москва: Наука, 1981.
- [118] M. Abramowitz и I. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, New York: Dover, 1965.
- [119] E. T. Whittaker и G. N. Watson, A Course of Modern Analysis, Cambridge University Press, 1996.
- [120] V. S. Beskin, A. V. Gurevich и Y. N. Istomin, Physics of the pulsar magnetosphere, Cambridge University Press, 1993.

- [121] D. A. Diver, A. A. da Costa, E. W. Laing, C. R. Stark и L. F. Teodoro, «On the surface extraction of electrons in a pulsar», *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, т. 401, № 1, pp. 613-620, 2009.
- [122] F. W. Olver, «Uniform asymptotic expansions for Weber parabolic cylinder functions of large orders», *Journal of Research of the National Bureau of Standarts* B. Mathematics and Mathematical Physics, т. 63В, № 2, pp. 131-173, 1959.
- [123] V. A. Baturin, O. Y. Karpenko, I. V. Profatilova, S. O. Pustovoitov и V. I. Miroshnichenko, «The experimental setup for high voltage breakdown studies in the high vacuum», *Problems of Atomic Science and Technology*, т. 4, № 98, pp. 294-297, 2015.
- [124] B. Seznec, P. Dessante, T. Jager, L. Caillault, P. Teste и T. Minea, «Dynamics of microparticles in vacuum breakdown: Cranberg's scenario updated by numerical modeling», *Physical Review Accelerators and Beams*, т. 20, № 7, р. 073501–1– 073501–15, 2017.
- [125] J. G. Trump и R. J. Van de Graaf, «The insulation of high voltages in vacuum», Journal of Applied Physics, т. 18, № 3, pp. 327-332, 1947.
- [126] Л. В. Тарасова, «Современные представления о механизме электрического пробоя в высоком вакууме», *Успехи физических наук*, т. 58, р. 321–346, 1956.
- [127] В. Ф. Мазанко, А. В. Покоев и В. М. Миронов, Диффузионные процессы в металлах под действием магнитных полей и импульсных деформаций, Москва: Машиностроение, 2006.
- [128] A. von Engel, Ionized Gases, Oxford University Press, 1955.
- [129] N. Shipman, I. Profatilova, A. T. Perez Fontenla, W. Wuensch и S. Calatroni, «Effect of an Externally Applied Magnetic Field on the Breakdown Rate in Ultra-High Vacuum Measured in the Large Electrode System at CERN», *CLIC-Note*, № 1078, pp. 1-12, 2017.

## **ДОДАТОК**

### Список публікацій здобувача за темою дисертації

#### 1. Наукові публікації, у яких опубліковано основні наукові результати:

- [1] В. І. Мирошніченко і С. О. Лебединський, «Квантово-механічний рух електрона в паралельних магнітному та електричному полях», Доповіді НАН України, № 9, р. 61–65, 2014.
- [2] В. І. Мирошніченко і С. О. Лебединський, «Квантово-механічний рух електрона в схрещених однорідних електричному та магнітному полях», Доповіді НАН України, № 11, рр. 72-76, 2014.
- [3] **S. O. Lebedynskyi**, V. I. Miroshnichenko, R. I. Kholodov i V. A. Baturin, «The effect of a magnetic field on the motion of electrons for the field emission process description», *Problems of Atomic Science and Technology*, № 98, pp. 62-66, 2015.
- [4] S. Lebedynskyi, O. Karpenko, R. Kholodov, V. Baturin, I. Profatilova, N. Shipman,
  W. Wuensch, «DC vacuum breakdown in an external magnetic field», *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A*, № 908, p. 318–324, 2018.
- [5] S. O. Lebedynskyi, O. O. Pasko, R. I. Kholodov, «Relativistic correction of the field emission current in the Fowler-Nordheim formalism», *Journal of nano- and electronic physics*, № 2, pp. 02022-1–02022-6, 2019.
- [6] S. Lebedynskyi, R. Kholodov, «Field emission with relativistic effects in a magnetic field», *The European Physical Journal D*, №78, v.8, pp190-1-190-5, 2019.

### 2. Наукові праці апробаційного характеру:

- [1] С. О. Лебединський, «III Міжрегіональна науково-практична конференція молодих учених «Сучасні проблеми експериментальної та теоретичної фізики»
   СПЕТФ'2014, 16-17 квітня 2014», Рух електрона у паралельних магнітному та електричному полях, Суми, Україна, 2014.
- [2] S. O. Lebedynskyi, V. I. Miroshnichenko, «Trans-European School of High Energy Physics – TESHEP'2014, 17-24 July 2014», *Quantum-mechanical movement of the electron in electric and magnetic fields*, Basivka, Lviv Region, Ukraine, 2014.

- [3] С. О. Лебединський, «І Всеукраїнська науково-практична конференція молодих учених «Сучасні проблеми експериментальної та теоретичної фізики». СПЕТФ+МНФ'2015», Потенціальний бар'єр на межі метал-вакуум при наявності схрещених електричного та магнітного полів, Суми, Україна, 2015.
- [4] S. O. Lebedynskyi, R. I. Kholodov, «II Всеукраїнська науково-практична конференція молодих учених «Сучасні проблеми експериментальної та теоретичної фізики». СПЕТФ+МНФ'2016», *Decreasing of the field emission current by the external magnetic field*, Суми, Україна, 2016.
- [5] С. О. Лебединський, «XVI Конференція з фізики високих енергій, ядерної фізики і прискорювачів, 20-23 березня 2018 р.», *Релятивістська поправка до струму польової емісії електронів*, Харків, Україна, 2018.
- [6] S. O. Lebedynskyi, «IV Всеукраїнська науково-практична конференція молодих учених «Сучасні проблеми експериментальної та теоретичної фізики». – СПЕТФ+МНФ'2018, 24-25 квітня 2018», *Relativistic correction to the field electron emission current*, Суми, Україна, 2018.
- [7] С. О. Лебединський, Р. І. Холодов, «XVII Конференція з фізики високих енергій, ядерної фізики і прискорювачів, 26-29 березня 2019 р.», в *Релятивістський підхід до тунелювання електронів з конструкційних матеріалів прискорювачів*, Харків, Україна, 2019.
- [8] С. О. Лебединський, Р. І. Холодов, «V Всеукраїнська науково-практична конференція молодих учених «Сучасні проблеми експериментальної та теоретичної фізики». – СПЕТФ+МНФ'2019», Вплив зовнішнього магнітного поля на польову електронну емісію, Суми, Україна, 2019.
- [9] S. Lebedynskyi, «8th International Workshop on Mechanisms of Vacuum Arcs (MeVArc 2019)», Field electron emission in an external magnetic field parallel to the surface, Padova, Italy, 2019.